Grundlagen der analytischen Mechanik

Seminar: Theorie der komplexen Systeme

Marcus Tassler

Teil I: Lagrange Mechanik

Überblick

- Generalisierte Koordinaten und Zwangsbedingungen

Überblick

- Generalisierte Koordinaten und Zwangsbedingungen
- Das d'Alembertsche Prinzip

Überblick

- Generalisierte Koordinaten und Zwangsbedingungen
- Das d’Alembertsche Prinzip
- Die Lagrange- Gleichung 2. Art

Überblick

- Generalisierte Koordinaten und Zwangsbedingungen
- Das d'Alembertsche Prinzip
- Die Lagrange- Gleichung 2. Art
- Das Hamiltonsche Prinzip und die Lagrange-Gleichungen

Überblick

- Generalisierte Koordinaten und Zwangsbedingungen
- Das d'Alembertsche Prinzip
- Die Lagrange- Gleichung 2. Art
- Das Hamiltonsche Prinzip und die Lagrange-Gleichungen
- Zyklische Variablen

Zwangsbedingungen

Definitionen:

- **Zwangsbedingungen** sind geometrische Bindungen die die freie Bewegung eines Massepunktes einschränken.

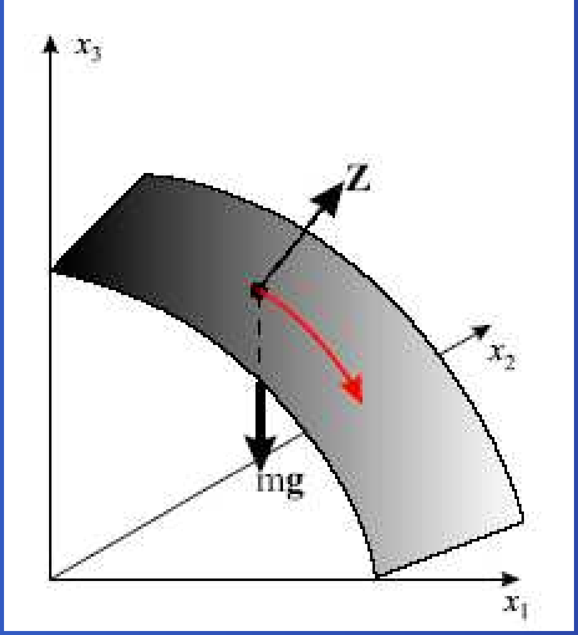
Zwangsbedingungen

Definitionen:

- **Zwangsbedingungen** sind geometrische Bindungen die die freie Bewegung eines Massepunktes einschränken.
- **Zwangskräfte** sind Kräfte die Zwangsbedingungen realisieren, d.h. Kräfte die die freie Bewegung eines Massenpunktes einschränken.

Zwangsbedingungen

Beispiel
Bewegung eines Massenpunkts auf einer gekrümmten Oberfläche im Schwerefeld



- **Zwangsbedingung:** Oberflächengleichung $f(x_1, x_2, x_3) = 0$
- **Zwangskraft:** Z kompensiert $F_\perp$ und Zentrifugalkraft

Zwangsbedingungen

- **Holonome Zwangsbedingungen:** Zwangsbedingungen der Form $f_\mu(x_1, x_2, \ldots, x_N, t) = 0, \;\; \mu = 1, 2, \ldots, p$

Zwangsbedingungen

- **Holonome Zwangsbedingungen:**
  Zwangsbedingungen der Form
  $f_\mu(x_1, x_2, \ldots, x_N, t) = 0, \;\; \mu = 1, 2, \ldots, p$
- **Holonom-skleronome Zwangsbedingung:**
  Zwangsbedingungen der Form
  $\frac{\partial f_\mu}{\partial t} = 0, \;\; \mu = 1, 2, \ldots, p$ (z.B.: starrer Körper)

Zwangsbedingungen

- **Holonome Zwangsbedingungen:**
  Zwangsbedingungen der Form
  $f_\mu(x_1, x_2, \ldots, x_N, t) = 0, \quad \mu = 1, 2, \ldots, p$
- **Holonom-skleronome Zwangsbedingung:**
  Zwangsbedingungen der Form
  $\frac{\partial f_\mu}{\partial t} = 0, \quad \mu = 1, 2, \ldots, p$ (z.B.: starrer Körper)
- **Holonom-rheonome Zwangsbedingungen:**
  Zwangsbedingungen der Form $\frac{\partial f_\mu}{\partial t} \neq 0$

Zwangsbedingungen

- **Holonome Zwangsbedingungen:** Zwangsbedingungen der Form $f_\mu(x_1, x_2, \ldots, x_N, t) = 0, \;\; \mu = 1, 2, \ldots, p$
- **Holonom-skleronome Zwangsbedingung:** Zwangsbedingungen der Form $\frac{\partial f_\mu}{\partial t} = 0, \;\; \mu = 1, 2, \ldots, p$ (z.B.: starrer Körper)
- **Holonom-rheonome Zwangsbedingungen:** Zwangsbedingungen der Form $\frac{\partial f_\mu}{\partial t} \neq 0$
- Im folgenden: konservativ-holonome Systeme

Zwangsbedingungen

- Eine holonome Zwangsbedingung erlaubt die Eliminierung einer Koordinate x_i und reduziert somit die Anzahl der Freiheitsgrade eines Systems um 1.

Zwangsbedingungen

- Eine holonome Zwangsbedingung erlaubt die Eliminierung einer Koordinate x_i und reduziert somit die Anzahl der Freiheitsgrade eines Systems um 1.
- Der Zustand eines N- Teilchensystems läßt sich somit bei p holonomen Zwangsbedingungen über $3N - p$ freie Koordinaten beschreiben.

Zwangsbedingungen

Die Koordinaten $q_1, \ldots, q_s$ werden als **generalisierte Koordinaten** bezeichnet wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- Der Zustand des betrachteten physikalischen Systems wird eindeutig über die Koordinaten $q_1, \ldots, q_s$ festgelegt.
- Die Koordinaten $q_1, \ldots, q_s$ sind unabhängig.

Zwangsbedingungen

Die Koordinaten $q_1, \ldots, q_s$ werden als **generalisierte Koordinaten** bezeichnet wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- Der Zustand des betrachteten physikalischen Systems wird eindeutig über die Koordinaten $q_1, \ldots, q_s$ festgelegt.
- Die Koordinaten $q_1, \ldots, q_s$ sind unabhängig.

Die Größen $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s$ werden als **generalisierte Geschwindigkeiten** bezeichnet.

Zwangsbedingungen

Die Koordinaten $q_1, \ldots, q_s$ werden als **generalisierte Koordinaten** bezeichnet wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- Der Zustand des betrachteten physikalischen Systems wird eindeutig über die Koordinaten $q_1, \ldots, q_s$ festgelegt.
- Die Koordinaten $q_1, \ldots, q_s$ sind unabhängig.

Der von den q_i aufgespannte Raum heißt **Konfigurationsraum**.

d'Alembertsches Prinzip

Definitionen:

- **Virtuelle Verrückung** $\delta\vec{r}_i$**:**
  Infinitesimale Koordinatenänderung bei konstant gehaltener Zeit ($\delta t = 0$) unter Berücksichtigung der Zwangsbedingungen.
- **Virtuelle Arbeit:** $\delta W_i = \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i$

d'Alembertsches Prinzip

- Newtonsche Bewegungsgleichung für Teilchen i:
  $\vec{F}_i = \vec{K}_i + \vec{Z}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i$

d'Alembertsches Prinzip

- Newtonsche Bewegungsgleichung für Teilchen i:
  $\vec{F}_i = \vec{K}_i + \vec{Z}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i$

Treibende Kraft

d'Alembertsches Prinzip

- Newtonsche Bewegungsgleichung für Teilchen i:
$$\vec{F}_i = \vec{K}_i + \vec{Z}_i = m_i\ddot{\vec{r}}_i$$

Zwangskraft

d'Alembertsches Prinzip

- Newtonsche Bewegungsgleichung für Teilchen i:
  $\vec{F}_i = \vec{K}_i + \vec{Z}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i$
- Somit gilt: $\sum_i (\vec{K}_i - m \ddot{\vec{r}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_i \vec{Z}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$

d'Alembertsches Prinzip

- Newtonsche Bewegungsgleichung für Teilchen i:
  $\vec{F}_i = \vec{K}_i + \vec{Z}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i$
- Somit gilt: $\sum_i (\vec{K}_i - m\ddot{\vec{r}}_i) \cdot \delta\vec{r}_i + \sum_i \vec{Z}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$
- $\sum_i \vec{Z}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$ (Prinzip der virtuellen Arbeit)

d’Alembertsches Prinzip

Westfälische Wilhelms-Universität Münster

- Newtonsche Bewegungsgleichung für Teilchen i:
  $\vec{F}_i = \vec{K}_i + \vec{Z}_i = m_i\ddot{\vec{r}}_i$
- Somit gilt: $\sum_i(\vec{K}_i - m\ddot{\vec{r}}_i) \cdot \delta\vec{r}_i + \sum_i \vec{Z}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$
- $\sum_i \vec{Z}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$ (Prinzip der virtuellen Arbeit)

d’Alembertsches Prinzip:

$$\boxed{\sum_i(\vec{K}_i - m\ddot{\vec{r}}_i) \cdot \delta\vec{r}_i = 0}$$

Lagrange Gleichung

d'Alembertsches Prinzip
in generalisierten Koordinaten:

$$\sum_{j=1}^{S} \left(\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] - Q_j \right) \delta q_j = 0$$

Lagrange Gleichung

d'Alembertsches Prinzip
in generalisierten Koordinaten:

$$\sum_{j=1}^{S} \left(\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] - Q_j \right) \delta q_j = 0$$

T: kinetische Energie

Lagrange Gleichung

d'Alembertsches Prinzip
in generalisierten Koordinaten:

$$\sum_{j=1}^{S}\left(\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}\right]-Q_j\right)\delta q_j=0$$

Generalisierte Kraftkomponenten:

$$Q_j=\sum_{i=1}^{N}\vec{K}_i\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

Lagrange Gleichung

d'Alembertsches Prinzip
in generalisierten Koordinaten:

$$\sum_{j=1}^{S}\left(\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}\right]-Q_j\right)\delta q_j=0$$

Generalisierte Kraftkomponenten:

$$Q_j=\sum_{i=1}^{N}\vec{K}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}$$

Konservative Systeme:

$$\vec{K}_i=-\nabla_i V\Rightarrow Q_j=-\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

Lagrange Gleichung

d'Alembertsches Prinzip

in generalisierten Koordinaten:

$$\sum_{j=1}^{S}\left(\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}\right]-Q_j\right)\delta q_j=0$$

Generalisierte Kraftkomponenten:

$$Q_j=\sum_{i=1}^{N}\vec{K}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}$$

Konservative Systeme:

$$\vec{K}_i=-\nabla_i V\Rightarrow Q_j=-\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

Definition: Lagrange-Funktion

$$L(q_1..q_s,\dot{q}_1..\dot{q}_s,t)=T(q_1..q_s,\dot{q}_1..\dot{q}_s,t)-V(q_1..q_s)$$

Lagrange Gleichung

d'Alembertsches Prinzip
in generalisierten Koordinaten:

$$\sum_{j=1}^{S} \left(\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] - Q_j \right) \delta q_j = 0$$

Konservative Systeme:

$$\sum_{j=1}^{S} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0$$

Lagrange Gleichung

d'Alembertsches Prinzip

in generalisierten Koordinaten:

$$\sum_{j=1}^{S} \left(\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] - Q_j \right) \delta q_j = 0$$

Konservative Systeme:

$$\sum_{j=1}^{S} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0$$

unabhängig bei holonomen ZB

Lagrange Gleichung

d'Alembertsches Prinzip
in generalisierten Koordinaten:

$$\sum_{j=1}^{S}\left(\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}\right]-Q_j\right)\delta q_j=0$$

Konservative Systeme:

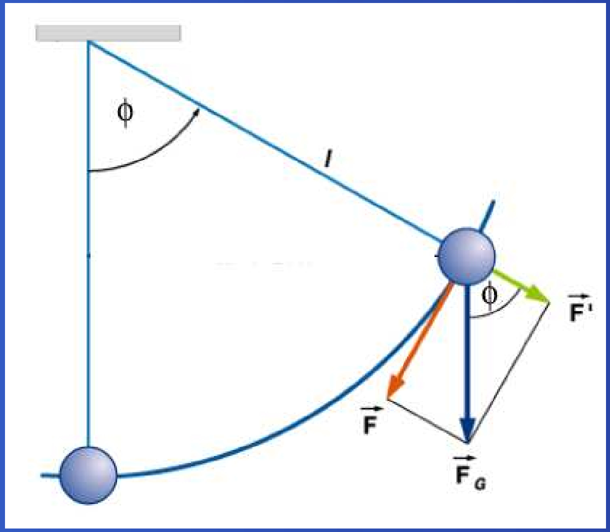
$$\sum_{j=1}^{S}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial L}{\partial q_j}\right)\delta q_j=0$$

Konservative Systeme mit holonomen ZB:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0}$$ (Lagrange- Gleichungen 2. Art)

Lagrange Gleichung

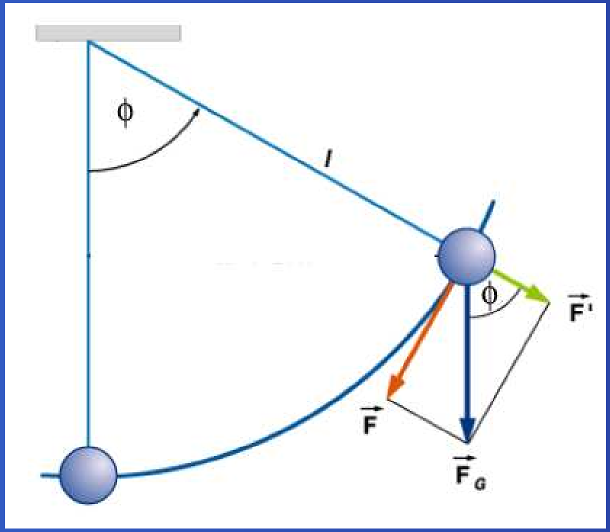
Beispiel: Pendel



- $V(\phi) = mgl(1 - \cos\phi)$
- $T(\dot{\phi}) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2$
- $L = ml\left(\frac{1}{2}l\dot{\phi}^2 - g(1-\cos\phi)\right)$

Lagrange Gleichung

Beispiel: Pendel

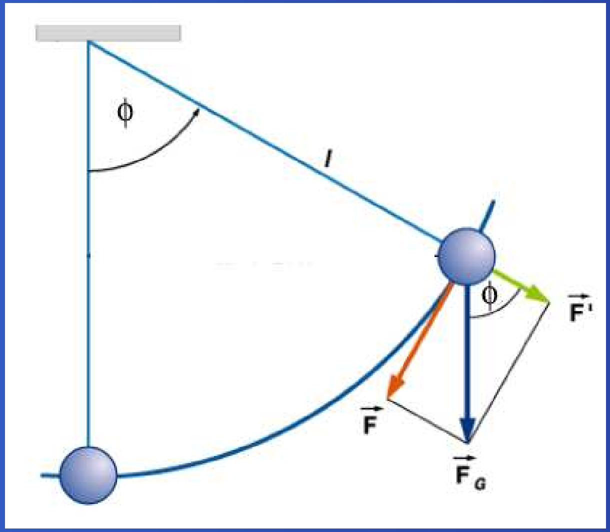


- $V(\phi) = mgl(1 - \cos\phi)$
- $T(\dot{\phi}) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2$
- $L = ml\left(\frac{1}{2}l\dot{\phi}^2 - g(1 - \cos\phi)\right)$

Lagrange Gleichung 2.Art für ϕ: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$

Lagrange Gleichung

Beispiel: Pendel



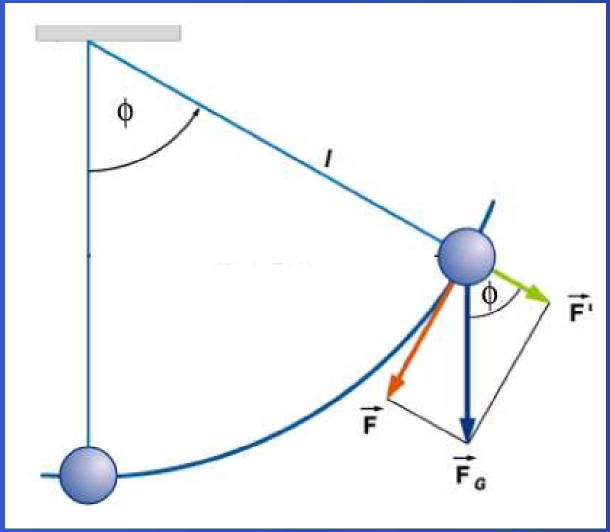
- $V(\phi) = mgl(1 - \cos\phi)$
- $T(\dot\phi) = \frac{1}{2} m l^2 \dot\phi^2$
- $L = ml\left(\frac{1}{2} l \dot\phi^2 - g(1 - \cos\phi)\right)$

Lagrange Gleichung 2.Art für ϕ: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\phi} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$

$\Rightarrow ml\left(l\ddot\phi + g\sin\phi\right) = 0$, kleine ϕ: $\boxed{\ddot\phi = -\frac{g}{l}\phi}$

Lagrange Gleichung

Beispiel: Pendel



- $V(\phi) = mgl(1 - \cos\phi)$
- $T(\dot{\phi}) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2$
- $L = ml\left(\frac{1}{2}l\dot{\phi}^2 - g(1 - \cos\phi)\right)$

Lagrange Gleichung 2.Art für ϕ: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$

$$\Rightarrow \phi = a\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t + b\sin\sqrt{\frac{g}{l}}t$$

Hamiltonsches Prinzip

Hamiltonsches Prinzip für konservative Systeme

Hamiltonsches Prinzip

Hamiltonsches Prinzip für konservative Systeme

Definition **Wirkungsfunktional**:

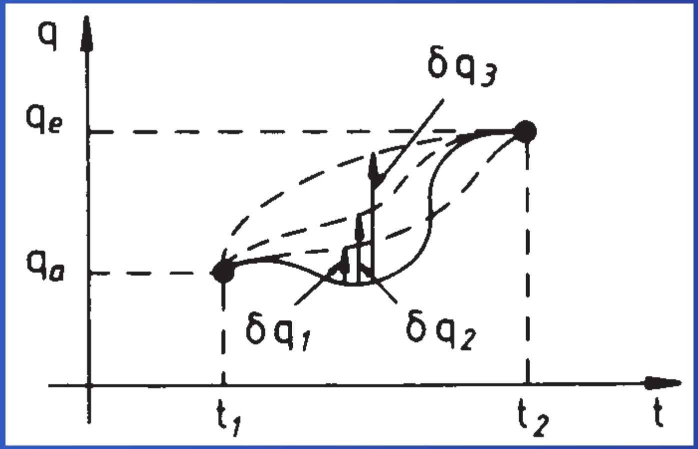
$$S(\vec{q}(t)) = \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t) dt$$

Hamiltonsches Prinzip

Hamiltonsches Prinzip für konservative Systeme

Definition **Wirkungsfunktional**:

$$S(\vec{q}(t)) = \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t)dt$$



Konkurrenzschar M mit

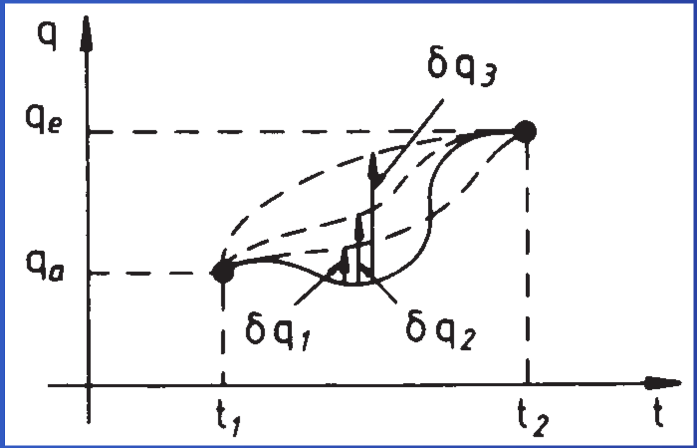
1) $\vec{q}(t) : \vec{q}(t_1) = \vec{q_a}; \vec{q}(t_2) = \vec{q_e}$
2) $\vec{q}(t) = \vec{q_r}(t) + \delta\vec{q}(t)$
3) $\delta\vec{q}(t_1) = \delta\vec{q}(t_2) = 0$

Hamiltonsches Prinzip

Hamiltonsches Prinzip für konservative Systeme

Definition **Wirkungsfunktional**:

$$S(\vec{q}(t)) = \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t)dt$$



Konkurrenzschar M mit

1) $\vec{q}(t) : \vec{q}(t_1) = \vec{q_a}; \vec{q}(t_2) = \vec{q_e}$

2) $\vec{q}(t) = \vec{q_r}(t) + \delta\vec{q}(t)$

3) $\delta\vec{q}(t_1) = \delta\vec{q}(t_2) = 0$

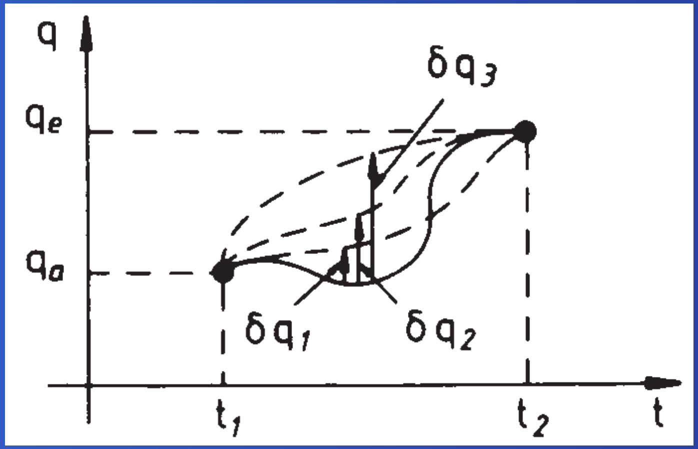
tatsächliche Bahn

Hamiltonsches Prinzip

Hamiltonsches Prinzip für konservative Systeme

Definition **Wirkungsfunktional**:

$$S(\vec{q}(t)) = \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t)dt$$



Konkurrenzschar M mit

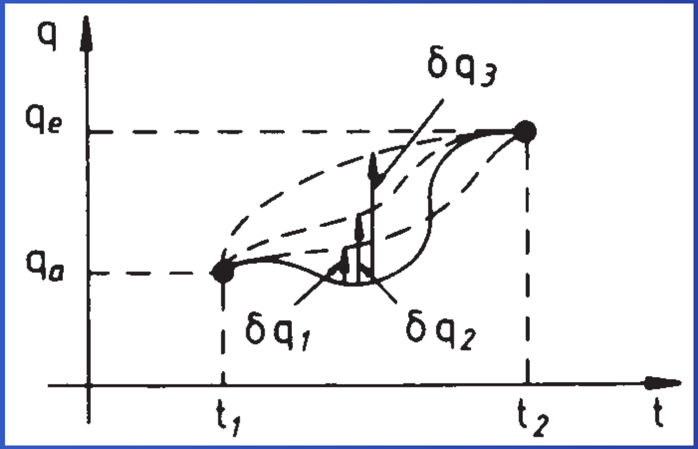
1) $\vec{q}(t) : \vec{q}(t_1) = \vec{q_a}; \vec{q}(t_2) = \vec{q_e}$
2) $\vec{q}(t) = \vec{q_r}(t) + \delta\vec{q}(t)$
3) $\delta\vec{q}(t_1) = \delta\vec{q}(t_2) = 0$

Hamiltonsches Prinzip

Hamiltonsches Prinzip für konservative Systeme

Definition **Wirkungsfunktional**:

$$S(\vec{q}(t)) = \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t) dt$$



Konkurrenzschar M mit

1) $\vec{q}(t) : \vec{q}(t_1) = \vec{q_a}; \vec{q}(t_2) = \vec{q_e}$
2) $\vec{q}(t) = \vec{q_r}(t) + \delta\vec{q}(t)$
3) $\delta\vec{q}(t_1) = \delta\vec{q}(t_2) = 0$

Hamiltonsches Prinzip: $\boxed{\delta S(\vec{q_r}(t)) \stackrel{!}{=} 0}$

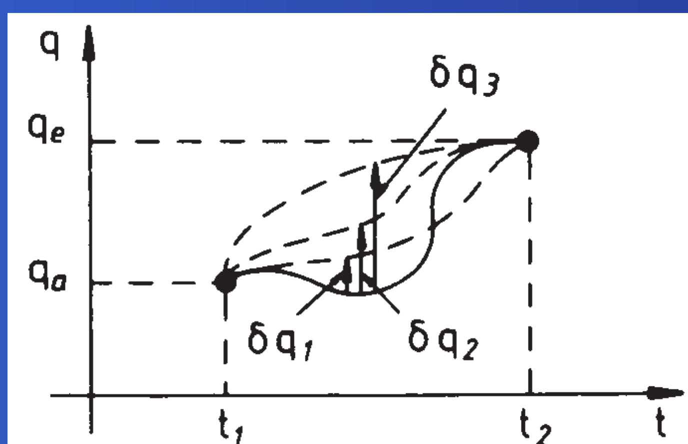
Hamiltonsches Prinzip

Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Hamiltonsches Prinzip für konservative Systeme

Definition **Wirkungsfunktional**:

$$S(\vec{q}(t)) = \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t)dt$$



Konkurrenzschar M mit

1) $\vec{q}(t) : \vec{q}(t_1) = \vec{q_a}; \vec{q}(t_2) = \vec{q_e}$

2) $\vec{q}(t) = \vec{q_r}(t) + \delta\vec{q}(t)$

3) $\delta\vec{q}(t_1) = \delta\vec{q}(t_2) = 0$

Hamiltonsches Prinzip: $\boxed{\delta S(\vec{q_r}(t)) \stackrel{!}{=} 0}$

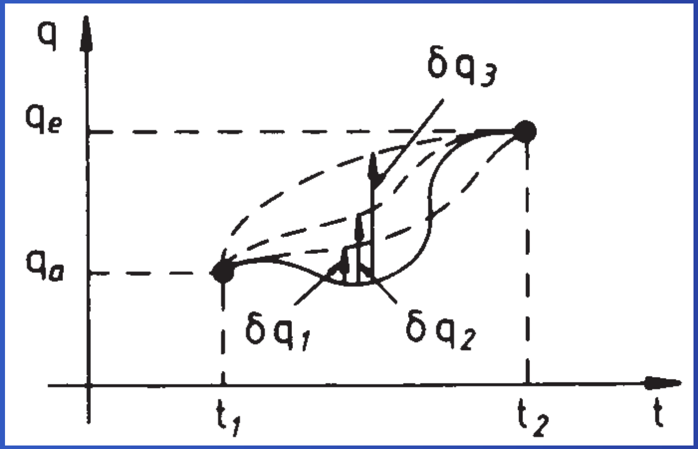
Variation

Hamiltonsches Prinzip

Hamiltonsches Prinzip für konservative Systeme

Definition **Wirkungsfunktional**:

$$S(\vec{q}(t)) = \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t)dt$$



Konkurrenzschar M mit

1) $\vec{q}(t) : \vec{q}(t_1) = \vec{q_a}; \vec{q}(t_2) = \vec{q_e}$
2) $\vec{q}(t) = \vec{q_r}(t) + \delta\vec{q}(t)$
3) $\delta\vec{q}(t_1) = \delta\vec{q}(t_2) = 0$

Hamiltonsches Prinzip: $\boxed{\delta S(\vec{q_r}(t)) \stackrel{!}{=} 0}$

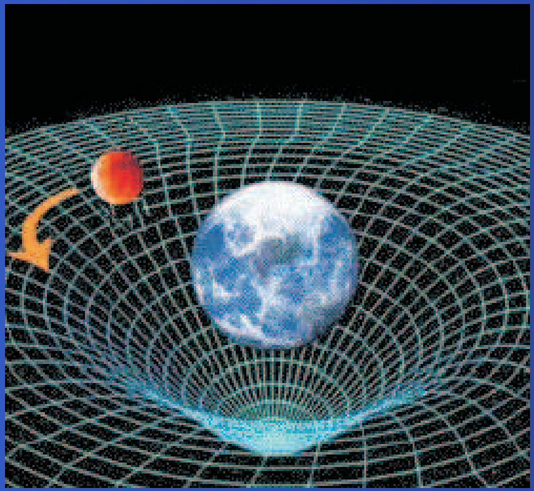
Tafelrechnung: Herleitung der Lagrange- Gleichungen

Hamiltonsches Prinzip

Das **Hamiltonsche Prinzip** in anderen Bereichen der Physik

Hamiltonsches Prinzip

Das **Hamiltonsche Prinzip** in anderen Bereichen der Physik



Allgemeine Relativitätstheorie

$$\delta \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{\kappa} R + \mathcal{L}_{mat} + \Lambda \right) \stackrel{!}{=} 0$$

(Hamiltonsches Prinzip der ART)

$$R^{\alpha\beta} + \left(\Lambda - \frac{R}{2} \right) g^{\alpha\beta} = -\kappa T^{\alpha\beta}$$

(Einsteinsche Feldgleichungen)

Hamiltonsches Prinzip

Das **Hamiltonsche Prinzip** in anderen Bereichen der Physik

Quantenfeldtheorie

$$\delta S = \delta \int d^4x \mathcal{L}(\phi_r, \phi_{r,\mu}) \stackrel{!}{=} 0$$

(Prinzip der kleinsten Wirkung)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\mu}} = 0, \quad r = 1, 2, \ldots$$

(Euler- Lagrange- Gleichungen)

Hamiltonsches Prinzip

Das **Hamiltonsche Prinzip** in anderen Bereichen der Physik

Quantenfeldtheorie

$$\delta S = \delta \int d^4x \mathcal{L}(\phi_r, \phi_{r,\mu}) \stackrel{!}{=} 0$$

(Prinzip der kleinsten Wirkung)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\mu}} = 0, \quad r = 1, 2, \ldots$$

(Euler- Lagrange- Gleichungen)

$$\pi_r(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_r(x)}, \quad \mathcal{H}(x) = \pi_r(x)\dot{\phi}_r(x) - \mathcal{L}(\phi_r, \phi_{r,\mu})$$

(Impuls- Feld und Hamiltondichte)

Hamiltonsches Prinzip

Das **Hamiltonsche Prinzip** in anderen Bereichen der Physik

Quantenfeldtheorie

$$\delta S = \delta \int d^4x \mathcal{L}(\phi_r, \phi_{r,\mu}) \stackrel{!}{=} 0$$

(Prinzip der kleinsten Wirkung)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\mu}} = 0, \quad r = 1, 2, \ldots$$

(Euler- Lagrange- Gleichungen)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\phi_\mu \phi^\mu - m^2\phi^2) \Rightarrow (\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi = 0$$

(Reelles Klein-Gordon-Feld)

Hamiltonsches Prinzip

Das **Hamiltonsche Prinzip** in anderen Bereichen der Physik

Quantenfeldtheorie

$$\delta S = \delta \int d^4x \mathcal{L}(\phi_r, \phi_{r,\mu}) \stackrel{!}{=} 0$$

(Prinzip der kleinsten Wirkung)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\mu}} = 0, \quad r = 1, 2, \ldots$$

(Euler- Lagrange- Gleichungen)

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - \frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu)(\partial^\nu A^\mu) - e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu \psi \Rightarrow$$

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = e\gamma^\mu A_\mu \psi, \quad \Box A^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu \psi$$

(Quantenelektrodynamik)

Zyklische Variable

Definition: Zyklische Variable

Variable q_i mit $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

Zyklische Variable

Definition: Zyklische Variable

Variable q_i mit $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

- Jede zyklische Variable führt auf einen Erhaltungssatz:

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0}_{\text{Lagrange Gleichung 2. Art}} \Rightarrow p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = const$$

Zyklische Variable

Definition: Zyklische Variable

Variable q_i mit $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

- Jede zyklische Variable führt auf einen Erhaltungssatz:
  $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = const$$
- Generalisierte Koordinaten sollten daher so gewählt daß möglichst viele zyklisch sind.

Zyklische Variable

Symmetrien und Erhaltungssätze (Noethersche Theoreme)

Zyklische Variable

Symmetrien und Erhaltungssätze (Noethersche Theoreme)

- **Homogenität der Zeit**

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow H = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - L = const$$

Zyklische Variable

Symmetrien und Erhaltungssätze (Noethersche Theoreme)

- **Homogenität der Zeit**

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow H = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - L = const$$

Hamilton- Funktion

Zyklische Variable

Symmetrien und Erhaltungssätze (Noethersche Theoreme)

- **Homogenität der Zeit**

  $$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow H = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - L = const$$

- **Homogenität des Raums**

  $$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} M_i \dot{\vec{r}_i} = const$$ (Impulserhaltung)

Zyklische Variable

Symmetrien und Erhaltungssätze (Noethersche Theoreme)

- **Homogenität der Zeit**

  $$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow H = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - L = const$$

- **Homogenität des Raums**

  $\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} M_i \dot{\vec{r}_i} = const$ (Impulserhaltung)

- **Isotropie des Raums**

  $\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r_i} \times \dot{\vec{r}_i} = const$ (Drehimpulserh.)

Teil II: Hamilton und Hamilton-Jacobi Mechanik

Übersicht

Hamilton Mechanik

Übersicht

Hamilton Mechanik

- Legendre Transformation, Hamiltonfunktion

Übersicht

Hamilton Mechanik

- Legendre Transformation, Hamiltonfunktion
- Kanonische Bewegungsgleichungen

Übersicht

Hamilton Mechanik

- Legendre Transformation, Hamiltonfunktion
- Kanonische Bewegungsgleichungen
- Poisson- Klammer

Übersicht

Hamilton Mechanik

- Legendre Transformation, Hamiltonfunktion
- Kanonische Bewegungsgleichungen
- Poisson- Klammer
- Kanonische Phasentransformationen

Übersicht

Hamilton Mechanik

- Legendre Transformation, Hamiltonfunktion
- Kanonische Bewegungsgleichungen
- Poisson- Klammer
- Kanonische Phasentransformationen

Hamilton-Jacobi Mechanik

Übersicht

Hamilton Mechanik

- Legendre Transformation, Hamiltonfunktion
- Kanonische Bewegungsgleichungen
- Poisson- Klammer
- Kanonische Phasentransformationen

Hamilton-Jacobi Mechanik

- Hamilton-Jacobi Gleichung

Übersicht

Hamilton Mechanik

- Legendre Transformation, Hamiltonfunktion
- Kanonische Bewegungsgleichungen
- Poisson- Klammer
- Kanonische Phasentransformationen

Hamilton-Jacobi Mechanik

- Hamilton-Jacobi Gleichung
- Separation der Variablen

Legendre Transformation

Gegeben: $f(x, y)$ mit

$$df = u dx + v dy, \quad u = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad v = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Legendre Transformation

Gegeben: $f(x, y)$ mit

$$df = u dx + v dy, \quad u = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad v = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Gesucht: $g(x, v)$ mit $dg = u dx - y dv, \quad y = \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)$

Legendre Transformation

Gegeben: $f(x,y)$ mit

$$df = udx + vdy, \quad u = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad v = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Gesucht: $g(x,v)$ mit $dg = udx - ydv, \quad y = \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)$

Lösung: $df = udx + vdy = udx + d(vy) - ydv$

Legendre Transformation

Gegeben: $f(x,y)$ mit

$$df = udx + vdy, \quad u = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad v = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Gesucht: $g(x,v)$ mit $dg = udx - ydv, \quad y = \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)$

Lösung: $df = udx + vdy = udx + d(vy) - ydv$

$$\Rightarrow d(f - vy) = udx - ydv$$

Legendre Transformation

Gegeben: $f(x,y)$ mit

$$df = udx + vdy, \quad u = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad v = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Gesucht: $g(x,v)$ mit $dg = udx - ydv, \quad y = \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)$

Lösung: $df = udx + vdy = udx + d(vy) - ydv$

$$\Rightarrow d(f - vy) = udx - ydv$$

$g(x,v)$ mit $dg = udx - ydv$

Legendre Transformation

Gegeben: $f(x,y)$ mit

$$df = udx + vdy, \quad u = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad v = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Gesucht: $g(x,v)$ mit $dg = udx - ydv, \quad y = \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)$

Lösung: $df = udx + vdy = udx + d(vy) - ydv$

$$\Rightarrow d(f - vy) = udx - ydv$$

Legendre- Transformierte von f bezüglich y:

$$g(x,v) = f(x,y) - vy, \quad v = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Hamilton-Funktion

Gegeben: $L(q_1, .., q_s, \dot{q}_1, .., \dot{q}_s, t)$ mit

$$dL = \frac{\partial L}{\partial q_1} dq_1 + .. + \frac{\partial L}{\partial q_s} dq_s + p_1 d\dot{q}_1 + .. + p_s d\dot{q}_s + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Hamilton-Funktion

Gegeben: $L(q_1,..,q_s,\dot q_1,..,\dot q_s,t)$ mit

$$dL = \frac{\partial L}{\partial q_1}dq_1 + .. + \frac{\partial L}{\partial q_s}dq_s + p_1 d\dot q_1 + .. + p_s d\dot q_s + \frac{\partial L}{\partial t}dt$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}$$ (verallgemeinerte Impulse)

Hamilton-Funktion

Gegeben: $L(q_1, .., q_s, \dot{q}_1, .., \dot{q}_s, t)$ mit

$$dL = \frac{\partial L}{\partial q_1} dq_1 + .. + \frac{\partial L}{\partial q_s} dq_s + p_1 d\dot{q}_1 + .. + p_s d\dot{q}_s + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Gesucht: Phasenraumfkt. $H(q_1, .., q_s, p_1, .., p_s, t)$

Hamilton-Funktion

Gegeben: $L(q_1, .., q_s, \dot{q}_1, .., \dot{q}_s, t)$ mit

$$dL = \frac{\partial L}{\partial q_1} dq_1 + .. + \frac{\partial L}{\partial q_s} dq_s + p_1 d\dot{q}_1 + .. + p_s d\dot{q}_s + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Gesucht: Phasenraumfkt. $H(q_1, .., q_s, p_1, .., p_s, t)$

Legendre Transformierte von L bezüglich $\dot{q}_1$:

$$T_1(q_1, .., q_s, p_1, \dot{q}_2, .., \dot{q}_s, t) = L - \dot{q}_1 p_1$$

Hamilton-Funktion

Gegeben: $L(q_1, .., q_s, \dot{q}_1, .., \dot{q}_s, t)$ mit

$$dL = \frac{\partial L}{\partial q_1} dq_1 + .. + \frac{\partial L}{\partial q_s} dq_s + p_1 d\dot{q}_1 + .. + p_s d\dot{q}_s + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Gesucht: Phasenraumfkt. $H(q_1, .., q_s, p_1, .., p_s, t)$

Legendre Transformierte von L bezüglich $\dot{q}_1$:

$$T_1(q_1, .., q_s, p_1, \dot{q}_2, .., \dot{q}_s, t) = L - \dot{q}_1 p_1$$

Legendre Transformierte von L bzgl. $\dot{q}_1, .., \dot{q}_s$:

$$T_{1,..,s}(q_1, .., q_s, p_1, .., p_s, t) = L - \sum_{i=1}^{s} \dot{q}_i p_i$$

Hamilton-Funktion

Gegeben: $L(q_1, .., q_s, \dot{q}_1, .., \dot{q}_s, t)$ mit

$$dL = \frac{\partial L}{\partial q_1} dq_1 + .. + \frac{\partial L}{\partial q_s} dq_s + p_1 d\dot{q}_1 + .. + p_s d\dot{q}_s + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Gesucht: Phasenraumfkt. $H(q_1, .., q_s, p_1, .., p_s, t)$

Legendre Transformierte von L bezüglich $\dot{q}_1$:

$$T_1(q_1, .., q_s, p_1, \dot{q}_2, .., \dot{q}_s, t) = L - \dot{q}_1 p_1$$

Legendre Transformierte von L bzgl. $\dot{q}_1, .., \dot{q}_s$:

$$T_{1,..,s}(q_1, .., q_s, p_1, .., p_s, t) = L - \sum_{i=1}^{s} \dot{q}_i p_i$$

Definition Hamilton-Funktion:

$$\boxed{H(q_1, .., q_s, p_1, .., p_s, t) = -T_{1,..,s} = \sum_{i=1}^{s} \dot{q}_i p_i - L}$$

Hamilton-Funktion

Gegeben: $L(q_1, .., q_s, \dot{q}_1, .., \dot{q}_s, t)$ mit

$$dL = \frac{\partial L}{\partial q_1} dq_1 + .. + \frac{\partial L}{\partial q_s} dq_s + p_1 d\dot{q}_1 + .. + p_s d\dot{q}_s + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Gesucht: Phasenraumfkt. $H(q_1, .., q_s, p_1, .., p_s, t)$

Legendre Transformierte von L bezüglich $\dot{q}_1$:

$$T_1(q_1, .., q_s, p_1, \dot{q}_2, .., \dot{q}_s, t) = L - \dot{q}_1 p_1$$

Legendre Transformierte von L bzgl. $\dot{q}_1, .., \dot{q}_s$:

$$T_{1,..,s}(q_1, .., q_s, p_1, .., p_s, t) = L - \sum_{i=1}^{s} \dot{q}_i p_i$$

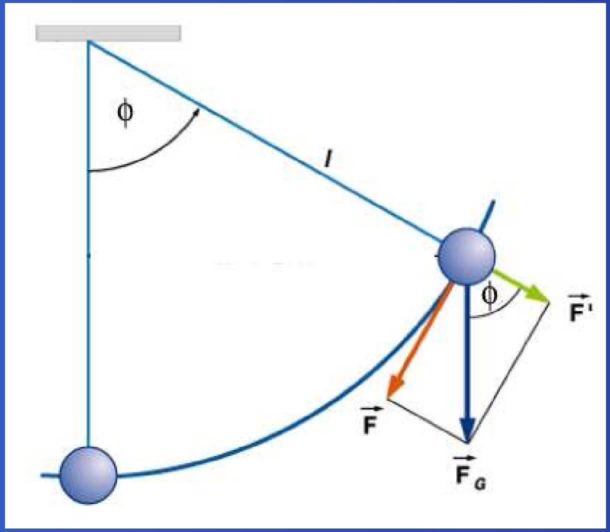
Definition Hamilton-Funktion:

$$\boxed{H(q_1, .., q_s, p_1, .., p_s, t) = -T_{1,..,s} = \sum_{i=1}^{s} \dot{q}_i p_i - L}$$

Tafelrechnung: Kanonische Bewegungsgleichungen

Hamilton Funktion

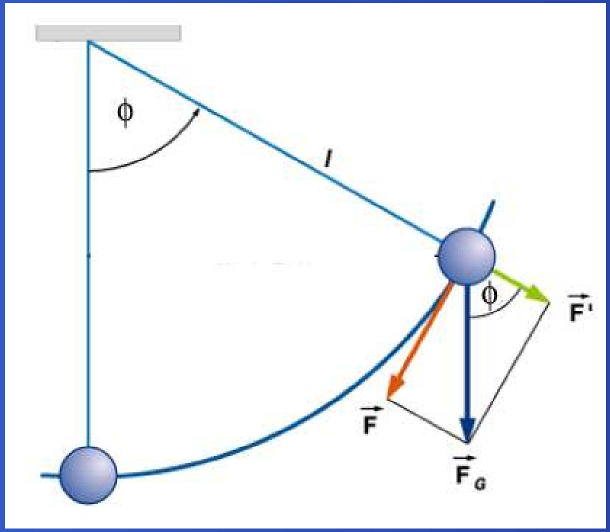
Beispiel: Pendel



- $V(\phi) = mgl(1 - \cos\phi)$
- $T(\dot{\phi}) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\phi}^2$
- $L = ml\left(\frac{1}{2} l \dot{\phi}^2 - g(1 - \cos\phi)\right)$

Hamilton Funktion

Beispiel: Pendel

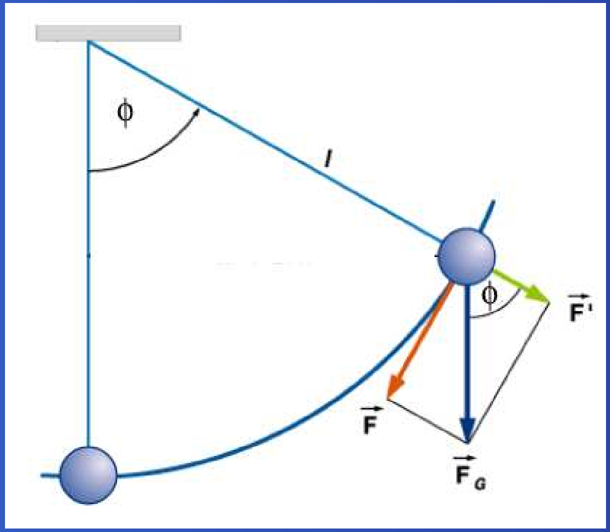


- $V(\phi) = mgl(1 - \cos\phi)$
- $T(\dot{\phi}) = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\phi}^2$
- $L = ml\left(\frac{1}{2} l \dot{\phi}^2 - g(1 - \cos\phi)\right)$

Verallgemeinerter Impuls: $p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = ml^2 \dot{\phi}$

Hamilton Funktion

Beispiel: Pendel



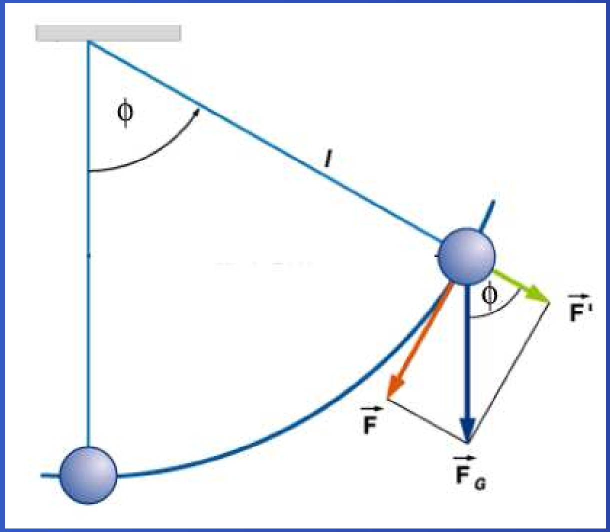
- $V(\phi) = mgl(1 - \cos\phi)$
- $T(\dot{\phi}) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2$
- $L = ml\left(\frac{1}{2}l\dot{\phi}^2 - g(1 - \cos\phi)\right)$

Verallgemeinerter Impuls: $p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = ml^2\dot{\phi}$

$$H = T + V = \frac{p_\phi^2}{2ml^2} + mlg(1 - \cos\phi)$$

Hamilton Funktion

Beispiel: Pendel



- $V(\phi) = mgl(1 - \cos\phi)$
- $T(\dot{\phi}) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\phi}^2$
- $L = ml\left(\frac{1}{2} l \dot{\phi}^2 - g(1 - \cos\phi)\right)$

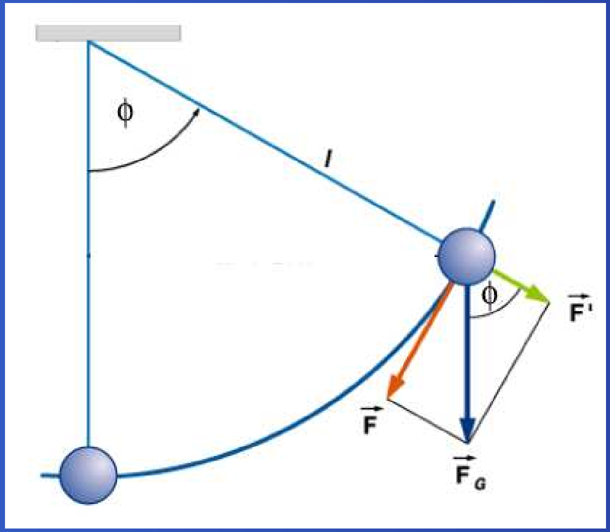
Verallgemeinerter Impuls: $p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m l^2 \dot{\phi}$

$$H = T + V = \frac{p_\phi^2}{2ml^2} + mlg(1 - \cos\phi)$$

(gültig für konservativ-holonome Systeme)

Hamilton Funktion

Beispiel: Pendel

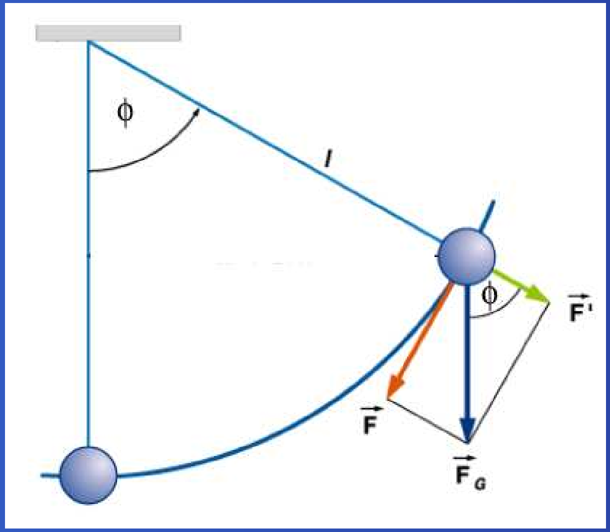


- $V(\phi) = mgl(1 - \cos\phi)$
- $T(\dot\phi) = \frac{1}{2} m l^2 \dot\phi^2$
- $L = ml\left(\frac{1}{2} l \dot\phi^2 - g(1 - \cos\phi)\right)$

$$\dot\phi = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{1}{ml^2} p_\phi, \quad \dot p_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = -mlg\sin\phi$$

Hamilton Funktion

Beispiel: Pendel



- $V(\phi) = mgl(1 - \cos\phi)$
- $T(\dot{\phi}) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\phi}^2$
- $L = ml\left(\frac{1}{2} l \dot{\phi}^2 - g(1 - \cos\phi)\right)$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{1}{ml^2} p_\phi, \quad \dot{p_\phi} = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = -mlg \sin\phi$$

kleine ϕ: $ml^2 \ddot{\phi} = \dot{p_\phi} = -mlg\phi \Rightarrow \boxed{\ddot{\phi} = -\frac{g}{l}\phi}$

Poisson Klammer

Definition: Poisson Klammer

$$\{f(\vec{q},\vec{p},t), g(\vec{q},\vec{p},t)\}_{\vec{q},\vec{p}} \equiv \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$$

Poisson Klammer

Definition: Poisson Klammer

$$\{f(\vec{q},\vec{p},t), g(\vec{q},\vec{p},t)\}_{\vec{q},\vec{p}} \equiv \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$$

Eigenschaften

- Poissonklammern erlauben die prägnante Formulierung klassicher Gesetze

Poisson Klammer

Definition: Poisson Klammer

$$\{f(\vec{q},\vec{p},t),g(\vec{q},\vec{p},t)\}_{\vec{q},\vec{p}} \equiv \sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right)$$

Eigenschaften

- Poissonklammern erlauben die prägnante Formulierung klassicher Gesetze
- Die **Quantenmechanik** erhält ihren Bezug zur klassischen Mechanik über die **Korrespondenz** von Kommutator und Poisson Klammer im Heisenberg- Bild

Poisson Klammer

Definition: Poisson Klammer

$$\{f(\vec{q},\vec{p},t), g(\vec{q},\vec{p},t)\}_{\vec{q},\vec{p}} \equiv \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$$

Fundamentale Poisson Klammer

$$\{q_i, q_j\}_{\vec{q},\vec{p}} = 0, \quad \{p_i, p_j\}_{\vec{q},\vec{p}} = 0, \quad \{q_i, p_j\}_{\vec{q},\vec{p}} = \delta_{ij}$$

Poisson Klammer

Definition: Poisson Klammer

$$\{f(\vec{q},\vec{p},t), g(\vec{q},\vec{p},t)\}_{\vec{q},\vec{p}} \equiv \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$$

Fundamentale Poisson Klammer

$$\{q_i, q_j\}_{\vec{q},\vec{p}} = 0, \quad \{p_i, p_j\}_{\vec{q},\vec{p}} = 0, \quad \{q_i, p_j\}_{\vec{q},\vec{p}} = \delta_{ij}$$

- Kriterium für die **Kanonizität** von Koordinatentransformationen

Poisson Klammer

Definition: Poisson Klammer

$$\{f(\vec{q},\vec{p},t),g(\vec{q},\vec{p},t)\}_{\vec{q},\vec{p}} \equiv \sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right)$$

Fundamentale Poisson Klammer

$$\{q_i,q_j\}_{\vec{q},\vec{p}} = 0, \quad \{p_i,p_j\}_{\vec{q},\vec{p}} = 0, \quad \{q_i,p_j\}_{\vec{q},\vec{p}} = \delta_{ij}$$

- Kriterium für die **Kanonizität** von Koordinatentransformationen
- **QM:** $[\hat{q}_i,\hat{q}_j]_- = [\hat{p}_i,\hat{p}_j]_- = 0, \quad [\hat{q}_i,\hat{p}_j]_- = i\hbar\delta_{ij}$

Phasentransformationen

Phasentransformation: $(\vec{q}, \vec{p}) \longrightarrow (\vec{\bar{q}}, \vec{\bar{p}})$

Phasentransformationen

Phasentransformation: $(\vec{q}, \vec{p}) \longrightarrow (\vec{\bar{q}}, \vec{\bar{p}})$

Kanonische Phasentransformationen

- $\exists \bar{H}(\vec{\bar{q}}, \vec{\bar{p}}, t)$ mit $\dot{\bar{q}}_i = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}_i}, \dot{\bar{p}}_i = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{q}_i} \;\; \forall i$

Phasentransformationen

Phasentransformation: $(\vec{q}, \vec{p}) \longrightarrow (\vec{\bar{q}}, \vec{\bar{p}})$

Kanonische Phasentransformationen

- $\exists \bar{H}(\vec{\bar{q}}, \vec{\bar{p}}, t)$ mit $\dot{\bar{q}}_i = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}_i}, \dot{\bar{p}}_i = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{q}_i} \;\; \forall i$
- **Kriterium für Kanonizität:** Fundamentale Poisson- Klammer

Phasentransformationen

F_2-Transformationen

Erzeugende Funktion: $F_2 = F_2(\vec{q}, \vec{\bar{p}}, t)$

Phasentransformationen

F_2-Transformationen

Erzeugende Funktion: $F_2 = F_2(\vec{q}, \vec{\bar{p}}, t)$

Bei **kanonischer Transformation** gilt:

$\sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - H = -\sum_{i=1}^{s} \bar{q}_i \dot{\bar{p}}_i - \bar{H} + \frac{dF_2}{dt}$

Phasentransformationen

F_2-Transformationen

Erzeugende Funktion: $F_2 = F_2(\vec{q}, \vec{\bar{p}}, t)$

Bei **kanonischer Transformation** gilt:

$$\sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - H = -\sum_{i=1}^{s} \bar{q}_i \dot{\bar{p}}_i - \bar{H} + \frac{dF_2}{dt}$$

Hieraus folgt über Differentialbildung:

$$\boxed{p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad \bar{q}_i = \frac{\partial F_2}{\partial \bar{p}_i}, \quad \bar{H} = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}}$$

Phasentransformationen

F_2**-Transformationen**

Erzeugende Funktion: $F_2 = F_2(\vec{q}, \vec{\bar{p}}, t)$

Bei **kanonischer Transformation** gilt:

$$\sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - H = -\sum_{i=1}^{s} \bar{q}_i \dot{\bar{p}}_i - \bar{H} + \frac{dF_2}{dt}$$

Hieraus folgt über Differentialbildung:

$$\boxed{p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad \bar{q}_i = \frac{\partial F_2}{\partial \bar{p}_i}, \quad \bar{H} = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}}$$

Über Einsetzen in das Hamiltonsche Prinzip und Variation nach $(\vec{\bar{q}}, \vec{\bar{p}})$ folgen die **Hamiltonschen Bewegungsgleichungen**.

Phasentransformationen

Äquivalente Erzeugende

	$\bar{q}$	$\bar{p}$
q	$F_1(\vec{q},\vec{\bar{q}},t)$: $p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \quad \bar{p}_i = -\frac{\partial F_1}{\partial \bar{q}_i}$	$F_1(\vec{q},\vec{\bar{p}},t)$: $p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad \bar{q}_i = \frac{\partial F_2}{\partial \bar{p}_i}$
p	$F_3(\vec{p},\vec{\bar{q}},t)$: $q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}, \quad \bar{p}_i = -\frac{\partial F_3}{\partial \bar{q}_i}$	$F_4(\vec{p},\vec{\bar{p}},t)$: $q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}, \quad \bar{q}_i = \frac{\partial F_4}{\partial \bar{p}_i}$

Hamilton- Jacobi Dgl.

Gesucht: Transformation S mit

$\bar{q}_i =$const, $\bar{p}_i =$const $\forall i$

Hamilton- Jacobi Dgl.

Gesucht: Transformation S mit
$\bar{q}_i =$const, $\bar{p}_i =$const $\forall i$

Lösung: S mit $\boxed{\bar{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0}$

Hamilton- Jacobi Dgl.

Gesucht: Transformation S mit $\bar{q}_i =$const, $\bar{p}_i =$const $\forall i$

Lösung: S mit $\boxed{\bar{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0}$

Beweis: $\dot{\bar{q}}_i = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}_i} = 0$, $\dot{\bar{p}}_i = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{q}_i} = 0$

Hamilton- Jacobi Dgl.

Gesucht: Transformation S mit
$\bar{q}_i =$const, $\bar{p}_i =$const $\forall i$

Lösung: S mit $\boxed{\bar{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0}$

Beweis: $\dot{\bar{q}}_i = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}_i} = 0$, $\dot{\bar{p}}_i = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{q}_i} = 0$

S sei F_2- Transformation $\Rightarrow p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$

Hamilton- Jacobi Dgl.

Gesucht: Transformation S mit
$\bar{q}_i =$const, $\bar{p}_i =$const $\forall i$

Lösung: S mit $\boxed{\bar{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0}$

Beweis: $\dot{\bar{q}}_i = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}_i} = 0$, $\dot{\bar{p}}_i = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{q}_i} = 0$

S sei F_2- Transformation $\Rightarrow p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$

Hamilton-Jacobi Differentialgleichung

$$\boxed{H(q_1, \ldots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0}$$

Hamilton- Jacobi Dgl.

Physikalische Bedeutung der Transformation

Hamilton- Jacobi Dgl.

Physikalische Bedeutung der Transformation

Es gilt: $\frac{d}{dt}S(\vec{q},\vec{\bar{p}},t) = \sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial \bar{p}_i}\dot{\bar{p}}_i\right) + \frac{\partial S}{\partial t}$

Hamilton- Jacobi Dgl.

Physikalische Bedeutung der Transformation

Es gilt: $\frac{d}{dt}S(\vec{q},\vec{\bar{p}},t) = \sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial \bar{p}_i}\dot{\bar{p}}_i\right) + \frac{\partial S}{\partial t}$

Außerdem: $\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \;\; \dot{\bar{p}}_i = 0, \;\; \frac{\partial S}{\partial t} = \bar{H} - H = -H$

Hamilton- Jacobi Dgl.

Physikalische Bedeutung der Transformation

Es gilt: $\frac{d}{dt}S(\vec{q},\vec{\bar{p}},t) = \sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial \bar{p}_i}\dot{\bar{p}}_i\right) + \frac{\partial S}{\partial t}$

Außerdem: $\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i\,,\;\; \dot{\bar{p}}_i = 0,\;\; \frac{\partial S}{\partial t} = \bar{H} - H = -H$

(da F_2- Transformation)

Hamilton- Jacobi Dgl.

Physikalische Bedeutung der Transformation

Es gilt: $\frac{d}{dt}S(\vec{q},\vec{\bar{p}},t) = \sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial \bar{p}_i}\dot{\bar{p}}_i\right) + \frac{\partial S}{\partial t}$

Außerdem: $\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \;\; \dot{\bar{p}}_i = 0, \;\; \frac{\partial S}{\partial t} = \bar{H} - H = -H$

(nach Voraussetzung: $\bar{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$)

Hamilton- Jacobi Dgl.

Physikalische Bedeutung der Transformation

Es gilt: $\frac{d}{dt}S(\vec{q},\vec{\bar{p}},t) = \sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial \bar{p}_i}\dot{\bar{p}}_i\right) + \frac{\partial S}{\partial t}$

Außerdem: $\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \;\; \dot{\bar{p}}_i = 0, \;\; \frac{\partial S}{\partial t} = \bar{H} - H = -H$

Somit folgt: $\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^{s} p_i q_i - H = L$

$$\Rightarrow \boxed{S = \int L dt + const}$$

Hamilton- Jacobi Dgl.

Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Physikalische Bedeutung der Transformation

Es gilt: $\frac{d}{dt} S(\vec{q}, \vec{\bar{p}}, t) = \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial \bar{p}_i} \dot{\bar{p}}_i \right) + \frac{\partial S}{\partial t}$

Außerdem: $\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \;\; \dot{\bar{p}}_i = 0, \;\; \frac{\partial S}{\partial t} = \bar{H} - H = -H$

Somit folgt: $\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^{s} p_i q_i - H = L$

$$\Rightarrow \boxed{S = \int L dt + const}$$

Die **Erzeugende S** in der Hamilton- Jacobi Mechanik entspricht der **Wirkung S** im Hamiltonschen Prinzip.

Separation der Variablen

Betrachtung der HJD für $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$

Separation der Variablen

Betrachtung der HJD für $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$

Definition: Hamiltonsche charakteristische Funktion W

$$S(\vec{q}, \vec{\vec{p}}, t) = W(\vec{q}, \vec{\vec{p}}) - Et$$

Separation der Variablen

Betrachtung der HJD für $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$

Definition: Hamiltonsche charakteristische Funktion W

$$S(\vec{q}, \vec{\bar{p}}, t) = W(\vec{q}, \vec{\bar{p}}) - Et$$

$$(H = const = E)$$

Separation der Variablen

Betrachtung der HJD für $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$

Definition: Hamiltonsche charakteristische Funktion W

$$S(\vec{q}, \vec{\bar{p}}, t) = W(\vec{q}, \vec{\bar{p}}) - Et$$

W ist **Erzeugende der Transformation**:

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \quad \bar{q}_i = \frac{\partial W}{\partial \bar{p}_i}, \quad \bar{H} = H$$

Separation der Variablen

Betrachtung der HJD für $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$

Definition: Hamiltonsche charakteristische Funktion W

$$S(\vec{q}, \vec{\bar{p}}, t) = W(\vec{q}, \vec{\bar{p}}) - Et$$

W ist **Erzeugende der Transformation**:

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \quad \bar{q}_i = \frac{\partial W}{\partial \bar{p}_i}, \quad \bar{H} = H$$

W sei so gewählt daß $\bar{p}_i = \alpha_i = const$ für alle i

Separation der Variablen

Betrachtung der HJD für $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$

Definition: Hamiltonsche charakteristische Funktion W

$$S(\vec{q}, \vec{\bar{p}}, t) = W(\vec{q}, \vec{\bar{p}}) - Et$$

W ist **Erzeugende der Transformation**:

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \quad \bar{q}_i = \frac{\partial W}{\partial \bar{p}_i}, \quad \bar{H} = H$$

W sei so gewählt daß $\bar{p}_i = \alpha_i = const$ für alle i

($\bar{q}_i$ zyklisch $\Rightarrow \bar{p}_i = const$),

Separation der Variablen

Betrachtung der HJD für $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$

Definition: Hamiltonsche charakteristische Funktion W

$$S(\vec{q}, \vec{\bar{p}}, t) = W(\vec{q}, \vec{\bar{p}}) - Et$$

W ist **Erzeugende der Transformation**:

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \quad \bar{q}_i = \frac{\partial W}{\partial \bar{p}_i}, \quad \bar{H} = H$$

W sei so gewählt daß $\bar{p}_i = \alpha_i = const$ für alle i

Hamilton- Jacobi Differentialgleichung

$$\boxed{H(q_1, \ldots, qs, \frac{\partial W}{\partial q_1}, .., \frac{\partial W}{\partial q_s}) = E(\alpha_1, .., \alpha_s)}$$

Separation der Variablen

q_1 erscheine in H nur in der Form $f(q_1, \frac{\partial W}{\partial q_1})$

Separation der Variablen

q_1 erscheine in H nur in der Form $f(q_1, \frac{\partial W}{\partial q_1})$

Ansatz: $W(\vec{q}, \vec{\bar{p}}) = \bar{W}(q_2, \ldots, q_s, \vec{\bar{p}}) + W_1(q_1, \vec{\bar{p}})$

Separation der Variablen

q_1 erscheine in H nur in der Form $f(q_1, \frac{\partial W}{\partial q_1})$

Ansatz: $W(\vec{q}, \vec{\bar{p}}) = \bar{W}(q_2, \ldots, q_s, \vec{\bar{p}}) + W_1(q_1, \vec{\bar{p}})$

HJD: $H(q_2, \ldots, q_s, \frac{\partial \bar{W}}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial \bar{W}}{\partial q_s}, f(q_1, \frac{\partial W_1}{\partial q_1})) = E$

Separation der Variablen

q_1 erscheine in H nur in der Form $f(q_1, \frac{\partial W}{\partial q_1})$

Ansatz: $W(\vec{q}, \vec{\bar{p}}) = \bar{W}(q_2, \ldots, q_s, \vec{\bar{p}}) + W_1(q_1, \vec{\bar{p}})$

HJD: $H(q_2, \ldots, q_s, \frac{\partial \bar{W}}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial \bar{W}}{\partial q_s}, f(q_1, \frac{\partial W_1}{\partial q_1})) = E$

$$H = const \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial q_1} = 0 \Rightarrow \boxed{f(q_1, \frac{dW_1}{dq_1}) = c_1 = const}$$

Separation der Variablen

q_1 erscheine in H nur in der Form $f(q_1, \frac{\partial W}{\partial q_1})$

Ansatz: $W(\vec{q}, \vec{\bar{p}}) = \bar{W}(q_2, \ldots, q_s, \vec{\bar{p}}) + W_1(q_1, \vec{\bar{p}})$

HJD: $H(q_2, \ldots, q_s, \frac{\partial \bar{W}}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial \bar{W}}{\partial q_s}, f(q_1, \frac{\partial W_1}{\partial q_1})) = E$

$$H = const \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial q_1} = 0 \Rightarrow \boxed{f(q_1, \frac{dW_1}{dq_1}) = c_1 = const}$$

HJD: $H(q_2, \ldots, q_s, \frac{\partial \bar{W}}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial \bar{W}}{\partial q_s}, c_1) = E$

Separation der Variablen

q_1 erscheine in H nur in der Form $f(q_1, \frac{\partial W}{\partial q_1})$

Ansatz: $W(\vec{q}, \vec{\bar{p}}) = \bar{W}(q_2, \ldots, q_s, \vec{\bar{p}}) + W_1(q_1, \vec{\bar{p}})$

HJD: $H(q_2, \ldots, q_s, \frac{\partial \bar{W}}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial \bar{W}}{\partial q_s}, f(q_1, \frac{\partial W_1}{\partial q_1})) = E$

$$H = const \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial q_1} = 0 \Rightarrow \boxed{f(q_1, \frac{dW_1}{dq_1}) = c_1 = const}$$

HJD: $H(q_2, \ldots, q_s, \frac{\partial \bar{W}}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial \bar{W}}{\partial q_s}, c_1) = E$

Können sukzessive alle Variablen q_i abgetrennt werden, ist die HJD in den Koordinaten q_i **separabel**.

Separation der Variablen

q_1 erscheine in H nur in der Form $f(q_1, \frac{\partial W}{\partial q_1})$

Ansatz: $W(\vec{q}, \vec{\bar{p}}) = \bar{W}(q_2, \ldots, q_s, \vec{\bar{p}}) + W_1(q_1, \vec{\bar{p}})$

HJD: $H(q_2, \ldots, q_s, \frac{\partial \bar{W}}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial \bar{W}}{\partial q_s}, f(q_1, \frac{\partial W_1}{\partial q_1})) = E$

$$H = const \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial q_1} = 0 \Rightarrow \boxed{f(q_1, \frac{dW_1}{dq_1}) = c_1 = const}$$

HJD: $H(q_2, \ldots, q_s, \frac{\partial \bar{W}}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial \bar{W}}{\partial q_s}, c_1) = E$

Können sukzessive alle Variablen q_i abgetrennt werden, ist die HJD in den Koordinaten q_i **separabel**.

Separation der Variablen

Ansatz bei in den Koordinaten q_i separabler HJD

Separation der Variablen

Ansatz bei in den Koordinaten q_i separabler HJD

Charakteristische Funktion:

$$\boxed{W = \sum_{j=1}^{s} W_j(q_j, \alpha_1, \ldots, \alpha_s)}$$

Separation der Variablen

Ansatz bei in den Koordinaten q_i separabler HJD

Charakteristische Funktion:

$$\boxed{W = \sum_{j=1}^{s} W_j(q_j, \alpha_1, \ldots, \alpha_s)}$$

$\bar{p}_j = \alpha_j$ da W so gewählt daß alle q_j zyklisch

Separation der Variablen

Ansatz bei in den Koordinaten q_i separabler HJD

Charakteristische Funktion:

$$\boxed{W = \sum_{j=1}^{s} W_j(q_j, \alpha_1, \ldots, \alpha_s)}$$

Es ergeben sich s Differentialgleichungen der Form:

$$\boxed{H_j(q_j, \frac{dW_j}{dq_j}, \alpha_1, \ldots, \alpha_s) = \alpha_j}$$

Separation der Variablen

Ansatz bei in den Koordinaten q_i separabler HJD

Charakteristische Funktion:

$$\boxed{W = \sum_{j=1}^{s} W_j(q_j, \alpha_1, \ldots, \alpha_s)}$$

Es ergeben sich s Differentialgleichungen der Form:

$$\boxed{H_j(q_j, \frac{dW_j}{dq_j}, \alpha_1, \ldots, \alpha_s) = \alpha_j}$$

Die Gleichungen sind nach $\frac{dW_j}{dq_j}$ aufzulösen und zu integrieren

Fokker-Planck Gleichung

Hamilton-Jacobi Formalismus und Behandlung der **Fokker-Planck Gleichung**:

$$\frac{\partial}{\partial t} W = \left(-\frac{\partial}{\partial q^\nu} K^\nu(q) + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2}{\partial q^\nu \partial q^\mu} Q^{\nu\mu} \right) W$$

Fokker-Planck Gleichung

Hamilton-Jacobi Formalismus und Behandlung der **Fokker-Planck Gleichung**:

$$\frac{\partial}{\partial t}W = \left(-\frac{\partial}{\partial q^\nu}K^\nu(q) + \frac{\eta}{2}\frac{\partial^2}{\partial q^\nu \partial q^\mu}Q^{\nu\mu}\right)W$$

$W(\vec{q}, t)$: Wahrscheinlichkeitsdichte

Fokker-Planck Gleichung

Hamilton-Jacobi Formalismus und Behandlung der **Fokker-Planck Gleichung**:

$$\frac{\partial}{\partial t} W = \left(-\frac{\partial}{\partial q^\nu} K^\nu(q) + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2}{\partial q^\nu \partial q^\mu} Q^{\nu\mu} \right) W$$

Fokker-Planck Gleichung

Hamilton-Jacobi Formalismus und Behandlung der **Fokker-Planck Gleichung**:

$$\frac{\partial}{\partial t} W = \left(-\frac{\partial}{\partial q^\nu} K^\nu(q) + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2}{\partial q^\nu \partial q^\mu} Q^{\nu\mu} \right) W$$

Ansatz für statische Dichte W:

$$W(\vec{q}, \eta) = N(\eta) e^{-\phi(\vec{q},\eta)/\eta}$$

Fokker-Planck Gleichung

Hamilton-Jacobi Formalismus und Behandlung der **Fokker-Planck Gleichung**:

$$\frac{\partial}{\partial t} W = \left(-\frac{\partial}{\partial q^\nu} K^\nu(q) + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2}{\partial q^\nu \partial q^\mu} Q^{\nu\mu} \right) W$$

Ansatz für statische Dichte W:

$$W(\vec{q}, \eta) = N(\eta) e^{-\phi(\vec{q},\eta)/\eta}$$

Für $\eta \to 0$ mit $\phi(\vec{q}) = \lim_{\eta \to 0} \phi(\vec{q}, \eta)$ folgt:

$$K^\nu(q) \frac{\partial \phi(\vec{q})}{\partial q^\nu} + \frac{1}{2} Q^{\nu\mu} \frac{\partial \phi(\vec{q})}{\partial q^\nu} \frac{\partial \phi(\vec{q})}{\partial q^\mu} = 0$$

Fokker-Planck Gleichung

Hamilton-Jacobi Formalismus und Behandlung der **Fokker-Planck Gleichung**:

$$\frac{\partial}{\partial t} W = \left(-\frac{\partial}{\partial q^\nu} K^\nu(q) + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2}{\partial q^\nu \partial q^\mu} Q^{\nu\mu} \right) W$$

Ansatz für statische Dichte W:

$$W(\vec{q}, \eta) = N(\eta) e^{-\phi(\vec{q},\eta)/\eta}$$

Für $\eta \to 0$ mit $\phi(\vec{q}) = \lim_{\eta \to 0} \phi(\vec{q}, \eta)$ folgt:

$$K^\nu(q) \frac{\partial \phi(\vec{q})}{\partial q^\nu} + \frac{1}{2} Q^{\nu\mu} \frac{\partial \phi(\vec{q})}{\partial q^\nu} \frac{\partial \phi(\vec{q})}{\partial q^\mu} = 0$$

Interpretation als HJD mit Wirkung $\phi(\tilde{\mathrm{q}})$:

$$\boxed{H(\vec{q}, \vec{p}) = \frac{1}{2} Q^{\mu\nu} p_\nu p_\mu + K^\nu(q) p_\nu = 0}$$

Zusammenfassung

Lagrange Mechanik

Grundprinzipien:

d'Alembertsches Prinzip: $\sum_i (\vec{K}_i - m\ddot{\vec{r}}_i) \cdot \delta\vec{r}_i = 0$

Hamiltonsches Prinzip: $\delta \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)dt \stackrel{!}{=} 0$

Lagrange-Funktion: $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = T(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) - V(\vec{q})$

Bewegungsgleichung:

Lagrange Gleichung 2. Art: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$

Zusammenfassung

Lagrange Mechanik

Hamiltonsches Prinzip und **Lagrange-gleichungen** besitzen außerhalb der Mechanik große Bedeutung insbesondere in den **Feldtheorien**.

Zusammenfassung

Hamiltonmechanik
Die Hamiltonmechanik stellt eine Formulierung der Lagrangemechanik im Phasenraum dar.

Hamilton-Funktion:
$H(q_1, .., q_s, p_1, .., p_s, t) = \sum_{i=1}^{s} \dot{q}_i p_i - L$
(Legendretransformierte von L)

Bewegungsgleichungen:
$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad -\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}, \quad i = 1, .., s$

Bedeutung: z.b. in statistischer Physik

Zusammenfassung

Hamilton-Jacobi Mechanik

Ziel: Bestimmung einer F_2- Transformation S die auf eine triviale Lösung des mechanischen Problems mit $\bar{q}_i =$const, $\bar{p}_i =$const $(\forall i)$ führt.

Hamilton-Jacobi Differentialgleichung:

$$H(q_1, \ldots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$ (S: Wirkung)

Insbesondere geeignet zur Lösung mechanischer Probleme mit **separablen Variablen**.

Ergänzungen

Lagrange Gleichungen

Konservative Systeme mit Zwangsbedingungen in **differenzieller Form**

$$\sum_{m=1}^{j} a_{im} dq_m + b_{it} dt = 0 \quad i = 1, \ldots, p$$

Lagrange Gleichungen

Konservative Systeme mit Zwangsbedingungen in **differenzieller Form**

$$\sum_{m=1}^{j} a_{im} dq_m + b_{it} dt = 0 \quad i = 1, \ldots, p$$

Formulierung für virtuelle Verrückungen:

$$\sum_{m=1}^{j} a_{im} \delta q_m = 0, \quad i = 1, \ldots, p$$

Lagrange Gleichungen

Konservative Systeme mit Zwangsbedingungen in **differenzieller Form**

$$\sum_{m=1}^{j} a_{im} dq_m + b_{it} dt = 0 \;\; i = 1, \ldots, p$$

Formulierung für virtuelle Verrückungen:

$$\sum_{m=1}^{j} a_{im} \delta q_m = 0, \;\; i = 1, \ldots, p$$

Es folgt: $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \sum_{m=1}^{j} a_{im} \delta q_m = 0$

Lagrange Gleichungen

Konservative Systeme mit Zwangsbedingungen in **differenzieller Form**

$\sum_{m=1}^{j} a_{im} dq_m + b_{it} dt = 0 \;\; i = 1, \ldots, p$

Formulierung für virtuelle Verrückungen:

$\sum_{m=1}^{j} a_{im} \delta q_m = 0, \;\; i = 1, \ldots, p$

Es folgt: $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \sum_{m=1}^{j} a_{im} \delta q_m = 0$

Lagrangescher Multiplikator

Lagrange Gleichungen

Konservative Systeme mit Zwangsbedingungen in **differenzieller Form**

$\sum_{m=1}^{j} a_{im} dq_m + b_{it} dt = 0 \quad i = 1, \ldots, p$

Formulierung für virtuelle Verrückungen:

$\sum_{m=1}^{j} a_{im} \delta q_m = 0, \quad i = 1, \ldots, p$

Es folgt: $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \sum_{m=1}^{j} a_{im} \delta q_m = 0$

Gleichsetzen mit d'Alembertschem Prinzip:

$\sum_{m=1}^{j} \left(\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial T}{\partial q_m} \right] - Q_m - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_{im} \right) \delta q_m = 0$

Lagrange Gleichungen

Konservative Systeme mit Zwangsbedingungen in **differenzieller Form**

$$\sum_{m=1}^{j} a_{im} dq_m + b_{it} dt = 0 \quad i = 1, \ldots, p$$

Erweiterte Lagrange Gleichung:

$$\sum_{m=1}^{j} \left(\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_m} \right] - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_{im} \right) \delta q_m = 0$$

Lagrange Gleichungen

Konservative Systeme mit Zwangsbedingungen in **differenzieller Form**

$$\sum_{m=1}^{j} a_{im} dq_m + b_{it} dt = 0 \quad i = 1, \ldots, p$$

Erweiterte Lagrange Gleichung:

$$\sum_{m=1}^{j} \left(\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_m} \right] - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_{im} \right) \delta q_m = 0$$

- Für die $j - p$ unabhängigen q_m muß jeder Summand für sich bereits 0 sein.

Lagrange Gleichungen

Konservative Systeme mit Zwangsbedingungen in **differenzieller Form**

$$\sum_{m=1}^{j} a_{im} dq_m + b_{it} dt = 0 \quad i = 1, \ldots, p$$

Erweiterte Lagrange Gleichung:

$$\sum_{m=1}^{j} \left(\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_m} \right] - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_{im} \right) \delta q_m = 0$$

- Für die $j - p$ unabhängigen q_m muß jeder Summand für sich bereits 0 sein.
- Für die p abhängigen q_m kann dies durch eine geeignete Wahl der λ_i erreicht werden

Lagrange Gleichungen

Konservative Systeme mit Zwangsbedingungen in **differenzieller Form**

$$\sum_{m=1}^{j} a_{im} dq_m + b_{it} dt = 0 \quad i = 1, \ldots, p$$

Erweiterte Lagrange Gleichung:

$$\sum_{m=1}^{j} \left(\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_m} \right] - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_{im} \right) \delta q_m = 0$$

Lagrange Gleichungen 1. Art

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_m} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_{im}}$$

(über geeignete Wahl der λ_i)

Bewegungsgleichungen

Aufstellen der **Bewegungsgleichungen**

Bewegungsgleichungen

Aufstellen der **Bewegungsgleichungen**

1) Festlegung der generalisierten Koordinaten $\vec{q}$

Bewegungsgleichungen

Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Aufstellen der **Bewegungsgleichungen**

1) Festlegung der generalisierten Koordinaten $\vec{q}$

2) Aufstellen der Transformationsgleichungen

$$q_i = q_i(\vec{r_1}, .., \vec{r_N}, t), \quad \dot{q}_i = \dot{q}_i(\vec{r_1}, .., \vec{r_N}, \dot{\vec{r_1}}, .., \dot{\vec{r_N}}, t)$$

Bewegungsgleichungen

Aufstellen der **Bewegungsgleichungen**

1) Festlegung der generalisierten Koordinaten $\vec{q}$

2) Aufstellen der Transformationsgleichungen

$$q_i = q_i(\vec{r_1}, .., \vec{r_N}, t), \quad \dot{q}_i = \dot{q}_i(\vec{r_1}, .., \vec{r_N}, \dot{\vec{r_1}}, .., \dot{\vec{r_N}}, t)$$

3) Aufstellen der Lagrange-Funktion

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = T(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) - V(\vec{q}, t)$$

Bewegungsgleichungen

Aufstellen der **Bewegungsgleichungen**

1) Festlegung der generalisierten Koordinaten $\vec{q}$

2) Aufstellen der Transformationsgleichungen

$$q_i = q_i(\vec{r_1}, .., \vec{r_N}, t), \quad \dot{q}_i = \dot{q}_i(\vec{r_1}, .., \vec{r_N}, \dot{\vec{r_1}}, .., \dot{\vec{r_N}}, t)$$

3) Aufstellen der Lagrange-Funktion

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = T(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) - V(\vec{q}, t)$$

4) Lagrange-Mechanik:
Aufstellen der Euler-Lagrange Gleichungen

Bewegungsgleichungen

Aufstellen der **Bewegungsgleichungen**

1) Festlegung der generalisierten Koordinaten $\vec{q}$

2) Aufstellen der Transformationsgleichungen

$$q_i = q_i(\vec{r_1}, .., \vec{r_N}, t), \quad \dot{q}_i = \dot{q}_i(\vec{r_1}, .., \vec{r_N}, \dot{\vec{r_1}}, .., \dot{\vec{r_N}}, t)$$

3) Aufstellen der Lagrange-Funktion

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = T(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) - V(\vec{q}, t)$$

4) Bestimmung von $\dot{\vec{q}}$ im Phasenraum:

$$p_i(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, .., s \Rightarrow \qquad \dot{\vec{q}} = \dot{\vec{q}}(\vec{q}, \vec{p}, t)$$

Bewegungsgleichungen

Aufstellen der **Bewegungsgleichungen**

Bewegungsgleichungen

Aufstellen der **Bewegungsgleichungen**

5) Bestimmung der Hamilton-Funktion:

$$H(\vec{q},\vec{p},t) = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i(\vec{q},\vec{p},t) - L(\vec{q},\dot{\vec{q}}(\vec{q},\vec{p},t),t)$$

Bewegungsgleichungen

Aufstellen der **Bewegungsgleichungen**

5) Bestimmung der Hamilton-Funktion:

$$H(\vec{q},\vec{p},t) = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i(\vec{q},\vec{p},t) - L(\vec{q},\dot{\vec{q}}(\vec{q},\vec{p},t),t)$$

6) Formulierung der Bewegungsgleichungen:

$$\boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad -\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}} \quad i = 1,..,s$$

Bewegungsgleichungen

Aufstellen der **Bewegungsgleichungen**

5) Bestimmung der Hamilton-Funktion:

$$H(\vec{q},\vec{p},t) = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i(\vec{q},\vec{p},t) - L(\vec{q},\dot{\vec{q}}(\vec{q},\vec{p},t),t)$$

6) Formulierung der Bewegungsgleichungen:

$$\boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad -\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}} \quad i = 1,..,s$$

Anmerkung: Bei holonom-skleronomen ZB gilt

$H(\vec{q},\vec{p},t) = T(\vec{q},\dot{\vec{q}},t) + V(\vec{q})$.

Die Hamilton-Funktion kann dann direkt über über $\dot{\vec{q}} = \dot{\vec{q}}(\vec{q},\vec{p},t)$ formuliert werden.

Poisson Klammer

Definition: Poisson Klammer

$$\{f(\vec{q},\vec{p},t),g(\vec{q},\vec{p},t)\}_{\vec{q},\vec{p}} \equiv \sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right)$$

Zeitliche Änderung einer Observablen f

$$\frac{d}{dt}f(\vec{q},\vec{p},t) = \sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i\right)+\frac{\partial f}{\partial t}$$

Poisson Klammer

Definition: Poisson Klammer

$$\{f(\vec{q},\vec{p},t),g(\vec{q},\vec{p},t)\}_{\vec{q},\vec{p}} \equiv \sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right)$$

Zeitliche Änderung einer Observablen f

$$\frac{d}{dt}f(\vec{q},\vec{p},t)=\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i\right)+\frac{\partial f}{\partial t}$$

$$=\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}+\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)+\frac{\partial f}{\partial t}$$

Poisson Klammer

Definition: Poisson Klammer

$$\{f(\vec{q},\vec{p},t), g(\vec{q},\vec{p},t)\}_{\vec{q},\vec{p}} \equiv \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$$

Zeitliche Änderung einer Observablen f

$$\frac{d}{dt} f(\vec{q},\vec{p},t) = \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$= \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{df}{dt} = \{f, H\}_{\vec{q},\vec{p}} + \frac{\partial f}{\partial t}}$$

Poisson Klammer

Definition: Poisson Klammer

$$\{f(\vec{q},\vec{p},t), g(\vec{q},\vec{p},t)\}_{\vec{q},\vec{p}} \equiv \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$$

Zeitliche Änderung einer Observablen f

$$\frac{d}{dt} f(\vec{q},\vec{p},t) = \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$= \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{df}{dt} = \{f, H\}_{\vec{q},\vec{p}} + \frac{\partial f}{\partial t}}$$

QM: $\frac{d\hat{f}_H}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{f}_H, \hat{H}]_- + \frac{\partial \hat{f}_H}{\partial t}$

Poisson Klammer

Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Definition: Poisson Klammer

$$\{f(\vec{q},\vec{p},t), g(\vec{q},\vec{p},t)\}_{\vec{q},\vec{p}} \equiv \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$$

Zeitliche Änderung einer Observablen f

$$\frac{d}{dt} f(\vec{q},\vec{p},t) = \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$= \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{df}{dt} = \{f, H\}_{\vec{q},\vec{p}} + \frac{\partial f}{\partial t}}$$

Integral der Bewegung: $\{f, H\}_{\vec{q},\vec{p}} = -\frac{\partial f}{\partial t}$