

Blockspin Konstruktion zur Lösung des Ising-Modells

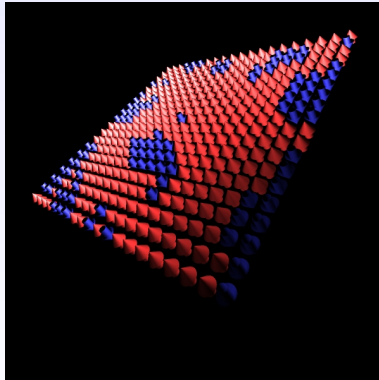
Marcus Tassler

Institut für Theoretische Physik,
WWU Münster

Seminar zur Theorie der Teilchen und Felder, 2005



Einleitung



Einleitung



Übersicht

- 1 Die Renormierungsgruppe
 - Die Renormierungsgruppe
 - Anwendung auf das Ising Modell

Übersicht

- 1 Die Renormierungsgruppe
 - Die Renormierungsgruppe
 - Anwendung auf das Ising Modell

- 2 Bezug zur Teilchenphysik
 - Der Wilsonsche Ansatz zur Renormierung



Die Renormierungsgruppe

Entwicklung der Renormierungsgruppe



Die heutige Theorie der Renormierungsgruppe geht auf Arbeiten von Leo P. Kadanoff zur Lösung des Ising Problems (1966) und Kenneth G. Wilson (NP 1982) zur Lösung des Kondo-Problems (1974) zurück.

Anwendungsgebiete der Renormierungsgruppe

Die Renormierungsgruppe findet als Werkzeug zur Behandlung kritischer Phänomene in folgenden Gebieten Anwendung:

- Statistische Physik: Behandlung von Phasenübergängen
- Teilchenphysik: Renormierung und laufende Kopplungen



Die Renormierungsgruppe

Renormierbare Theorien und Renormierungsgruppenfluß

- Die Physik einer Theorie sei über die Funktion $Z(\sigma_1 \dots \sigma_n, K_1 \dots K_m)$ mit Zustandsvariablen σ_i und Kopplungen K_i vollständig charakterisiert.
- Für renormierbare Theorien existiert eine Transformation $\{\sigma_i\} \rightarrow \{\sigma'_j\}$ ($j_{max} < i_{max}$), $\{K_i\} \rightarrow \beta(\{K_i\})$ mit: $Z(\{\sigma'_j\}, \beta(\{K_i\})) = Z(\{\sigma_i\}, \{K_i\})$ (Skaleninvarianz).
- Die Abbildung $\{K_i\} \rightarrow \beta(\{K_i\})$ bezeichnet die laufende Kopplung bzw. den Renormierungsgruppenfluß
- Durch iterative Anwendung der Transformation lassen sich Fixpunkte des Renormierungsgruppenfluß bestimmen.



Die Renormierungsgruppe

Anwendung auf das Ising Modell

- Über die Blockspinkonstruktion kann für das Ising Modell eine Rekursionsrelation zur Bestimmung des Renormierungsgruppenflusses ermittelt werden
- Die Zustandssumme des 1- und 2- dimensionalen Ising Modells kann näherungsweise durch die Bestimmung des Renormierungsgruppenflusses gelöst werden



Bezug zur Teilchenphysik

Renormierung in der Teilchenphysik

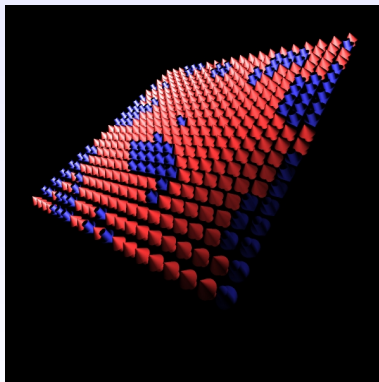
Der Begriff der Renormierung tritt in der Teilchenphysik im Zusammenhang mit der Beseitigung von Divergenzen auf.

Der Wilsonsche Ansatz zur Renormierung

- Die Anwendung der Renormierungsgruppe auf die Lagrangedichte von Feldtheorien ermöglicht die Bestimmung laufender Kopplungen
- Es zeigt sich daß die fundamentalen Theorien im Wilsonschen Sinne renormierbar sind.



Das Ising Modell



Das Ising Modell



Übersicht

3 Das Ising Modell

- Die Zustandssumme der kanonischen Gesamtheit
- Das Ising Modell
- Die Zustandssumme des Ising Modells



Übersicht

3 Das Ising Modell

- Die Zustandssumme der kanonischen Gesamtheit
- Das Ising Modell
- Die Zustandssumme des Ising Modells

4 Lösung des eindimensionalen Ising Modells

- Auswertung der Zustandssumme
- Renormierung
- Vergleich mit der exakten Lösung



Übersicht

- 3 Das Ising Modell
 - Die Zustandssumme der kanonischen Gesamtheit
 - Das Ising Modell
 - Die Zustandssumme des Ising Modells
- 4 Lösung des eindimensionalen Ising Modells
 - Auswertung der Zustandssumme
 - Renormierung
 - Vergleich mit der exakten Lösung
- 5 Lösung des zweidimensionalen Ising Modells
 - Auswertung der Zustandssumme
 - Renormierung
 - Der Phasenübergang des zweidimensionalen Ising-Modells



Die kanonische Zustandssumme

Kanonische Zustandssumme

$$Z = \text{Sp} e^{-\beta \hat{H}}$$

Die kanonische Zustandssumme ist die **zentrale Größe** der kanonischen Gesamtheit.



Die kanonische Zustandssumme

Kanonische Zustandssumme

$$Z = Sp e^{-\beta \hat{H}}$$

Die kanonische Zustandssumme ist die **zentrale Größe** der kanonischen Gesamtheit.

Thermodynamische Potentiale

Innere Energie:

$$U(T, V, N) = \langle \hat{H} \rangle = Sp \left(\frac{e^{-\beta \hat{H}}}{Z_N} \hat{H} \right) = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_N(T, V)$$



Die kanonische Zustandssumme

Kanonische Zustandssumme

$$Z = Sp e^{-\beta \hat{H}}$$

Die kanonische Zustandssumme ist die **zentrale Größe** der kanonischen Gesamtheit.

Thermodynamische Potentiale

Innere Energie:

$$U(T, V, N) = \langle \hat{H} \rangle = Sp \left(\frac{e^{-\beta \hat{H}}}{Z_N} \hat{H} \right) = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_N(T, V)$$

Freie Energie: $F(T, V, N) = -k_B T \ln Z_N(T, V)$

Entropie: $S(T, V, N) = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right) = k_B \frac{\partial}{\partial T} (T \ln Z_N(T, V))$



Die kanonische Zustandssumme

Kanonische Zustandssumme

$$Z = Sp e^{-\beta \hat{H}}$$

Die kanonische Zustandssumme ist die **zentrale Größe** der kanonischen Gesamtheit.

Thermodynamische Potentiale

Innere Energie:

$$U(T, V, N) = \langle \hat{H} \rangle = Sp \left(\frac{e^{-\beta \hat{H}}}{Z_N} \hat{H} \right) = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_N(T, V)$$

Freie Energie: $F(T, V, N) = -k_B T \ln Z_N(T, V)$

Entropie: $S(T, V, N) = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right) = k_B \frac{\partial}{\partial T} (T \ln Z_N(T, V))$

Alle **thermodynamischen Potentiale** lassen sich auf die Zustandssumme zurückführen!



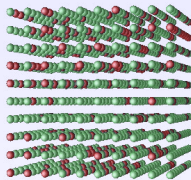
Die kanonische Zustandssumme

Zielstellung

Bestimmung der **kanonischen Zustandssumme** für das Ising-Modell.



Das Ising Modell

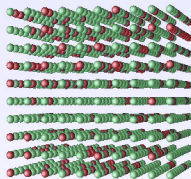


Einleitung

Das 1925 von Ernst Ising publizierte "Ising-Modell" ist ein einfaches Modell zur Beschreibung von magnetischen Isolatoren. Es wird heute hauptsächlich als Demonstrationsmodell der statistischen Physik verwendet.



Das Ising Modell

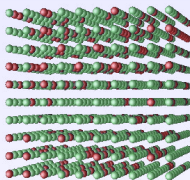


Aufbau des Ising-Modells

- Es wird ein d -dimensionales periodisches Gitter betrachtet
- An jedem der N Gitterpunkte befindet sich ein permanentes magnetisches Moment der Form $\mu\sigma_i$
- σ_i kann die Werte -1 und 1 annehmen



Das Ising Modell

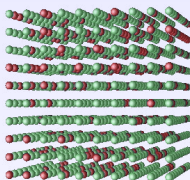


Wechselwirkungen

- Wechselwirkungen beschränken sich auf benachbarte Spins
- Jedes Paar (i, j) benachbarter Spins trägt die Wechselwirkungsenergie $E = -J \cdot \sigma_i \sigma_j$, ($J > 0$) bei.



Das Ising Modell



Hamiltonoperator

- Der Hamiltonoperator des Ising Modells lautet:

$$\hat{H} = - \sum_{i,j} J \hat{S}_i \hat{S}_j \text{ mit } \hat{S}_i |\sigma_1 \dots \sigma_N \rangle = \sigma_i$$

- Die Summe läuft über benachbarte Spins.
- Bei paralleler Stellung aller Spins ist die Energie des Systems minimal.

Die Zustandssumme des Ising Modells

Die Zustandssumme des Ising Modells

$$Z = \text{Sp} e^{-\beta \hat{H}} = \text{Sp} e^{\beta \sum_{i,j} J \hat{S}_i \hat{S}_j}$$



Die Zustandssumme des Ising Modells

Die Zustandssumme des Ising Modells

$$Z = \mathcal{S}p e^{-\beta \hat{H}} = \mathcal{S}p e^{\beta \sum_{i,j} J \hat{S}_i \hat{S}_j}$$

Aufgabenstellung

- Bestimmung einer Renormierungsgruppentransformation und der laufenden Kopplung



Die Zustandssumme des Ising Modells

Die Zustandssumme des Ising Modells

$$Z = \mathcal{S}_p e^{-\beta \hat{H}} = \mathcal{S}_p e^{\beta \sum_{i,j} J \hat{S}_i \hat{S}_j}$$

Aufgabenstellung

- Bestimmung einer Renormierungsgruppentransformation und der laufenden Kopplung
- Bestimmung der Zustandssumme in Abhängigkeit von T , J und N



Die Zustandssumme des Ising Modells

Die Zustandssumme des Ising Modells

$$Z = \mathcal{S}p e^{-\beta \hat{H}} = \mathcal{S}p e^{\beta \sum_{i,j} J \hat{S}_i \hat{S}_j}$$

Aufgabenstellung

- Bestimmung einer Renormierungsgruppentransformation und der laufenden Kopplung
- Bestimmung der Zustandssumme in Abhängigkeit von T , J und N
- Untersuchung des Renormierungsgruppenflusses auf Fixpunkte



Zustandssumme des eindimensionalen Ising Modells

Zustandssumme

$$Z = \sum_{\sigma} e^{\beta J \sum_i \sigma_i \sigma_{i+1}} = \sum_{\sigma} e^{\beta J (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_4 + \dots)}$$



Zustandssumme des eindimensionalen Ising Modells

Zustandssumme

$$Z = \sum_{\sigma} e^{\beta J \sum_i \sigma_i \sigma_{i+1}} = \sum_{\sigma} e^{\beta J (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_4 + \dots)}$$

1. Schritt

Eliminierung von Freiheitsgraden



Zustandssumme des eindimensionalen Ising Modells

Zustandssumme

$$Z = \sum_{\sigma} e^{\beta J \sum_i \sigma_i \sigma_{i+1}} = \sum_{\sigma} e^{\beta J (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_4 + \dots)}$$

1.Schritt

Eliminierung von Freiheitsgraden

Umformung der Zustandssumme:

$$Z = \sum_{\sigma} e^{K(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3)} e^{K(\sigma_3 \sigma_4 + \sigma_4 \sigma_5)} \dots$$

(σ_i tritt für gerade i in **nur einem Faktor** auf)

Definition

Kopplungskonstante: $K \equiv \beta J$



Zustandssumme des eindimensionalen Ising Modells

Zustandssumme

$$Z = \sum_{\sigma} e^{K(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \dots)} = \sum_{\sigma} e^{K(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3)} e^{K(\sigma_3\sigma_4 + \sigma_4\sigma_5)} \dots$$



Zustandssumme des eindimensionalen Ising Modells

Zustandssumme

$$Z = \sum_{\sigma} e^{K(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \dots)} = \sum_{\sigma} e^{K(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3)} e^{K(\sigma_3\sigma_4 + \sigma_4\sigma_5)} \dots$$

Ausführen der Summe über $\sigma_2, \sigma_4 \dots$:

$$Z = \sum_{\sigma} [e^{K(\sigma_1 + \sigma_3)} + e^{-K(\sigma_1 + \sigma_3)}] \cdot [e^{K(\sigma_3 + \sigma_5)} + e^{-K(\sigma_3 + \sigma_5)}] \dots$$



Zustandssumme des eindimensionalen Ising Modells

Zustandssumme

$$Z = \sum_{\sigma} e^{K(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \dots)} = \sum_{\sigma} e^{K(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3)} e^{K(\sigma_3\sigma_4 + \sigma_4\sigma_5)} \dots$$

Ausführen der Summe über $\sigma_2, \sigma_4 \dots$:

$$Z = \sum_{\sigma} [e^{K(\sigma_1 + \sigma_3)} + e^{-K(\sigma_1 + \sigma_3)}] \cdot [e^{K(\sigma_3 + \sigma_5)} + e^{-K(\sigma_3 + \sigma_5)}] \dots$$

Definition

$$K' = \frac{1}{2} \ln \cosh(2K) \quad f(K) = 2 \cosh^{1/2}(2K)$$



Zustandssumme des eindimensionalen Ising Modells

Zustandssumme

$$Z = \sum_{\sigma} e^{K(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \dots)} = \sum_{\sigma} e^{K(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3)} e^{K(\sigma_3\sigma_4 + \sigma_4\sigma_5)} \dots$$

Ausführen der Summe über $\sigma_2, \sigma_4 \dots$:

$$Z = \sum_{\sigma} [e^{K(\sigma_1 + \sigma_3)} + e^{-K(\sigma_1 + \sigma_3)}] \cdot [e^{K(\sigma_3 + \sigma_5)} + e^{-K(\sigma_3 + \sigma_5)}] \dots$$

Definition

$$K' = \frac{1}{2} \ln \cosh(2K) \quad f(K) = 2 \cosh^{1/2}(2K)$$

Es gilt: $e^{K(\sigma_i + \sigma_{i+2})} + e^{-K(\sigma_i + \sigma_{i+2})} = f(K) e^{K' \sigma_i \sigma_{i+2}}$



Zustandssumme des eindimensionalen Ising Modells

Zustandssumme

$$Z = \sum_{\sigma} e^{K(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \dots)} = \sum_{\sigma} e^{K(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3)} e^{K(\sigma_3\sigma_4 + \sigma_4\sigma_5)} \dots$$

Ausführen der Summe über $\sigma_2, \sigma_4 \dots$:

$$Z = \sum_{\sigma} [e^{K(\sigma_1 + \sigma_3)} + e^{-K(\sigma_1 + \sigma_3)}] \cdot [e^{K(\sigma_3 + \sigma_5)} + e^{-K(\sigma_3 + \sigma_5)}] \dots$$

Definition

$$K' = \frac{1}{2} \ln \cosh(2K) \quad f(K) = 2 \cosh^{1/2}(2K)$$

Es gilt: $e^{K(\sigma_i + \sigma_{i+2})} + e^{-K(\sigma_i + \sigma_{i+2})} = f(K) e^{K' \sigma_i \sigma_{i+2}}$

Neue Zustandssumme Z:

$$\sum_{\sigma} f(K) e^{K' \sigma_1 \sigma_3} f(K) e^{K' \sigma_3 \sigma_5} \dots = f(K)^{\frac{N}{2}} \sum_{\sigma} e^{K' \sigma_1 \sigma_3} e^{K' \sigma_3 \sigma_5} \dots$$



Renormierung

Zustandssumme

$$Z = \sum_{\sigma} e^{K(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\dots)} = f(K)^{\frac{N}{2}} \sum_{\sigma} e^{K'(\sigma_1\sigma_3+\sigma_3\sigma_5+\dots)}$$



Renormierung

Zustandssumme

$$Z = \sum_{\sigma} e^{K(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\dots)} = f(K)^{\frac{N}{2}} \sum_{\sigma} e^{K'(\sigma_1\sigma_3+\sigma_3\sigma_5+\dots)}$$

Renormierung

$$Z(N/2, K') = f(K)^{-\frac{N}{2}} Z(N, K)$$

$$K' = \frac{1}{2} \ln \cosh(2K)$$

$$f(K)^{-\frac{N}{2}} = (2 \cosh^{1/2}(2K))^{-\frac{N}{2}}$$

Fluß der Kopplungskonstante
Skalierungsfaktor



Renormierung

Zustandssumme

$$Z = \sum_{\sigma} e^{K(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\dots)} = f(K)^{\frac{N}{2}} \sum_{\sigma} e^{K'(\sigma_1\sigma_3+\sigma_3\sigma_5+\dots)}$$

Renormierung

$$Z(N/2, K') = f(K)^{-\frac{N}{2}} Z(N, K)$$

$$K' = \frac{1}{2} \ln \cosh(2K)$$

$$f(K)^{-\frac{N}{2}} = (2 \cosh^{1/2}(2K))^{-\frac{N}{2}}$$

Fluß der Kopplungskonstante
Skalierungsfaktor

Freie Energie

Große Systeme: $F \sim N \Rightarrow \ln Z = \xi N$

$$\xi(K') = 2\xi(K) - \ln f(K) \quad \text{”Fluß der freien Energie/Spin”}$$

Renormierung

Rekursion $N/2 \rightarrow N$

$$K = \frac{1}{2} \cosh^{-1} e^{2K'}$$

$$\xi(K) = \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} K' + \frac{1}{2} \xi(K')$$

Fluß der Kopplungskonstante

”Fluß der freien Energie/Spin”



Renormierung

Rekursion $N/2 \rightarrow N$

$$K = \frac{1}{2} \cosh^{-1} e^{2K'}$$

$$\xi(K) = \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} K' + \frac{1}{2} \xi(K')$$

Fluß der Kopplungskonstante

"Fluß der freien Energie/Spin"

Lösungsansatz

Für sehr kleine K' ist die Wechselwirkung vernachlässigbar.

$$Z \approx \sum_{\sigma} 1 = 2^N \Rightarrow \xi \approx \ln 2$$

$\Rightarrow \xi(K)$ kann über Rekursion bestimmt werden.



Vergleich mit der exakten Lösung

Ausgangspunkt: $K = 0.01$, $\xi(0.01) = \ln 2$

K	$\xi(K)$	
	Renormierungsgruppe	Exakt
0.01	$\ln 2$	0.693197
0.100334	0.698147	0.698172
0.327447	0.745814	0.745827
0.636247	0.883204	0.883210
0.972710	1.106299	1.106302
1.316710	1.386078	1.386080
1.662637	1.697968	1.697968
2.009049	2.026876	2.026877
2.355582	2.364536	2.364537
2.702146	2.706633	2.706634



Zustandssumme des zweidimensionalen Ising Modells

Zustandssumme

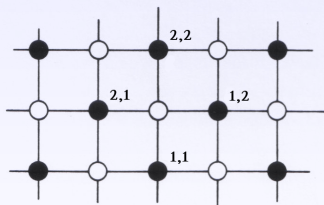
$$Z = Sp e^K \sum_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} = \sum_{\sigma} e^{K(\dots \sigma_{22} \sigma_{12} + \sigma_{22} \sigma_{32} + \sigma_{22} \sigma_{21} + \sigma_{22} \sigma_{23} \dots)}$$



Zustandssumme des zweidimensionalen Ising Modells

Zustandssumme

$$Z = \sum_{\sigma} e^{K \sum_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl}} = \sum_{\sigma} e^{K(\dots \sigma_{22} \sigma_{12} + \sigma_{22} \sigma_{32} + \sigma_{22} \sigma_{21} + \sigma_{22} \sigma_{23} \dots)}$$



1.Schritt: Eliminierung von Freiheitsgraden

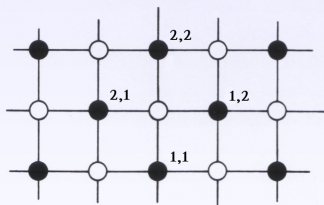
Ausführen der Summe über die markierten Gitterplätze



Zustandssumme des zweidimensionalen Ising Modells

Zustandssumme

$$Z = \sum_{\sigma} e^{K \sum_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl}} = \sum_{\sigma} e^{K(\dots \sigma_{22} \sigma_{12} + \sigma_{22} \sigma_{32} + \sigma_{22} \sigma_{21} + \sigma_{22} \sigma_{23} \dots)}$$



Neue Zustandssumme:

$$Z = \sum_{\sigma} \dots \left[e^{K(\sigma_{11} + \sigma_{12} + \sigma_{21} + \sigma_{22})} + e^{-K(\sigma_{11} + \sigma_{12} + \sigma_{21} + \sigma_{22})} \right] \dots$$

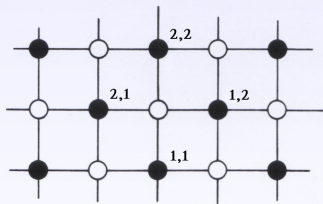
(neues Gitter ist um 45° gedreht)



Renormierung

Zustandssumme

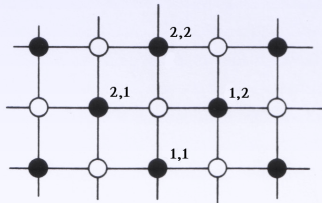
$$Z = \sum_{\sigma} \dots \left[e^{K(\sigma_{11} + \sigma_{12} + \sigma_{21} + \sigma_{22})} + e^{-K(\sigma_{11} + \sigma_{12} + \sigma_{21} + \sigma_{22})} \right] \dots$$



Renormierung

Zustandssumme

$$Z = \sum_{\sigma} \dots \left[e^{K(\sigma_{11} + \sigma_{12} + \sigma_{21} + \sigma_{22})} + e^{-K(\sigma_{11} + \sigma_{12} + \sigma_{21} + \sigma_{22})} \right] \dots$$



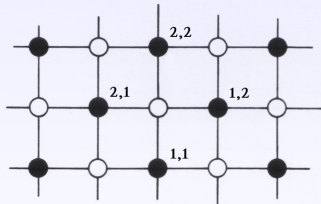
2.Schritt: Renormierung

Zur Bestimmung einer **Rekursionsrelation** ist die neue Zustandssumme wieder auf das Ising- Modell zurückzuführen.

Renormierung

Zustandssumme

$$Z = \sum_{\sigma} \dots \left[e^{K(\sigma_{11} + \sigma_{12} + \sigma_{21} + \sigma_{22})} + e^{-K(\sigma_{11} + \sigma_{12} + \sigma_{21} + \sigma_{22})} \right] \dots$$



Ansatz

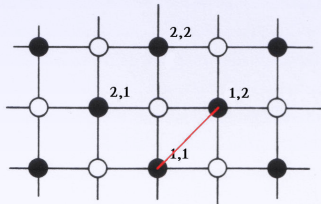
$$Z = f(K) \frac{N}{2} \sum_{\sigma} e^{K_1 \sum_{nn} \sigma_{ij} \sigma_{kl} + K_2 \sum_{nnn} \sigma_{ij} \sigma_{kl} + K_3 \sum_{sq} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \sigma_{mn} \sigma_{op}}$$



Renormierung

Zustandssumme

$$Z = \sum_{\sigma} \dots \left[e^{K(\sigma_{11} + \sigma_{12} + \sigma_{21} + \sigma_{22})} + e^{-K(\sigma_{11} + \sigma_{12} + \sigma_{21} + \sigma_{22})} \right] \dots$$



Ansatz

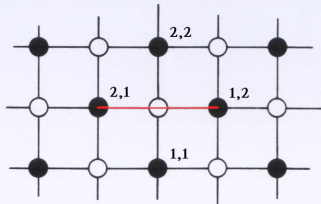
$$Z = f(K)^{\frac{N}{2}} \sum_{\sigma} e^{K_1 \sum_{nn} \sigma_{ij} \sigma_{kl} + K_2 \sum_{nnn} \sigma_{ij} \sigma_{kl} + K_3 \sum_{sq} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \sigma_{mn} \sigma_{op}}$$



Renormierung

Zustandssumme

$$Z = \sum_{\sigma} \dots \left[e^{K(\sigma_{11} + \sigma_{12} + \sigma_{21} + \sigma_{22})} + e^{-K(\sigma_{11} + \sigma_{12} + \sigma_{21} + \sigma_{22})} \right] \dots$$



Ansatz

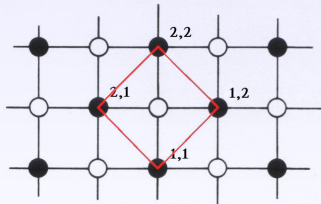
$$Z = f(K)^{\frac{N}{2}} \sum_{\sigma} e^{K_1 \sum_{nn} \sigma_{ij} \sigma_{kl} + K_2 \sum_{n\bar{n}\bar{n}} \sigma_{ij} \sigma_{kl} + K_3 \sum_{sq} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \sigma_{mn} \sigma_{op}}$$



Renormierung

Zustandssumme

$$Z = \sum_{\sigma} \dots \left[e^{K(\sigma_{11} + \sigma_{12} + \sigma_{21} + \sigma_{22})} + e^{-K(\sigma_{11} + \sigma_{12} + \sigma_{21} + \sigma_{22})} \right] \dots$$



Ansatz

$$Z = f(K) \frac{N}{2} \sum_{\sigma} e^{K_1 \sum_{nn} \sigma_{ij} \sigma_{kl} + K_2 \sum_{nnn} \sigma_{ij} \sigma_{kl} + K_3 \sum_{sq} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \sigma_{mn} \sigma_{op}}$$



Renormierung

Zustandssumme

$$Z = f(K) \frac{N}{2} \sum_{\sigma} e^{K_1 \sum_{nn} \sigma_{ij} \sigma_{kl} + K_2 \sum_{nnn} \sigma_{ij} \sigma_{kl} + K_3 \sum_{sq} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \sigma_{mn} \sigma_{op}}$$

Definition

$$f(K) = 2 \cosh^{\frac{1}{2}}(2K) \cosh^{\frac{1}{8}}(4K)$$

$$K_1 = \frac{1}{4} \ln \cosh(4K), \quad K_2 = \frac{1}{8} \ln \cosh(4K),$$

$$K_3 = \frac{1}{8} \ln \cosh(4K) - \frac{1}{2} \ln \cosh(2K)$$



Renormierung

Zustandssumme

$$Z = f(K) \frac{N}{2} \sum_{\sigma} e^{K_1 \sum_{nn} \sigma_{ij} \sigma_{kl} + K_2 \sum_{nnn} \sigma_{ij} \sigma_{kl} + K_3 \sum_{sq} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \sigma_{mn} \sigma_{op}}$$

Definition

$$f(K) = 2 \cosh^{\frac{1}{2}}(2K) \cosh^{\frac{1}{8}}(4K)$$

$$K_1 = \frac{1}{4} \ln \cosh(4K), \quad K_2 = \frac{1}{8} \ln \cosh(4K),$$

$$K_3 = \frac{1}{8} \ln \cosh(4K) - \frac{1}{2} \ln \cosh(2K)$$

Aufgabenstellung

Beseitigung der Faktoren K_2 und K_3



Renormierung

Zustandssumme

$$Z = f(K) \frac{N}{2} \sum_{\sigma} e^{K_1 \sum_{nn} \sigma_{ij} \sigma_{kl} + K_2 \sum_{nnn} \sigma_{ij} \sigma_{kl} + K_3 \sum_{sq} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \sigma_{mn} \sigma_{op}}$$

Näherungslösung

- K_1 und K_2 sind positiv. Die Energiebeiträge der jeweiligen Faktoren werden minimal bei parallelen Spins. K_1 und K_2 formulieren die Tendenz der Spins sich parallel auszurichten.



Renormierung

Zustandssumme

$$Z = f(K) \frac{N}{2} \sum_{\sigma} e^{K_1 \sum_{nn} \sigma_{ij} \sigma_{kl} + K_2 \sum_{nnn} \sigma_{ij} \sigma_{kl} + K_3 \sum_{sq} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \sigma_{mn} \sigma_{op}}$$

Näherungslösung

- K_1 und K_2 sind positiv. Die Energiebeiträge der jeweiligen Faktoren werden minimal bei parallelen Spins. K_1 und K_2 formulieren die Tendenz der Spins sich parallel auszurichten.

- Bei parallelen Spins beträgt die Energie des Systems:

$$E \sim -N\beta K_1 - N\beta K_2 = -N\beta(K_1 + K_2).$$

Dies entspricht der Energie eines Ising-Systems mit der Kopplungskonstante $K' = K_1 + K_2$ bei parallelen Spins.



Renormierung

Zustandssumme

$$Z = f(K) \frac{N}{2} \sum_{\sigma} e^{K_1 \sum_{nn} \sigma_{ij} \sigma_{kl} + K_2 \sum_{nnn} \sigma_{ij} \sigma_{kl} + K_3 \sum_{sq} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \sigma_{mn} \sigma_{op}}$$

Näherungslösung

- K_1 und K_2 sind positiv. Die Energiebeiträge der jeweiligen Faktoren werden minimal bei parallelen Spins. K_1 und K_2 formulieren die Tendenz der Spins sich parallel auszurichten.

- Bei parallelen Spins beträgt die Energie des Systems:

$$E \sim -N\beta K_1 - N\beta K_2 = -N\beta(K_1 + K_2).$$

Dies entspricht der Energie eines Ising-Systems mit der Kopplungskonstante $K' = K_1 + K_2$ bei parallelen Spins.



Renormierung

Zustandssumme

$$Z = f(K) \frac{N}{2} \sum_{\sigma} e^{K_1 \sum_{nn} \sigma_{ij} \sigma_{kl} + K_2 \sum_{nnn} \sigma_{ij} \sigma_{kl} + K_3 \sum_{sq} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \sigma_{mn} \sigma_{op}}$$

Näherungslösung

Unter Vernachlässigung von K_3 ergibt sich in einfacher Näherung:

$$Z \approx f(K) \frac{N}{2} \sum_{\sigma} e^{K' \sum_{nn} \sigma_{ij} \sigma_{kl}} \quad (K' = K_1 + K_2)$$



Renormierung

Zustandssumme

$$Z \approx f(K)^{\frac{N}{2}} \sum_{\sigma} e^{K' \sum_{nn} \sigma_{ij} \sigma_{kl}}$$



Renormierung

Zustandssumme

$$Z \approx f(K)^{\frac{N}{2}} \sum_{\sigma} e^{K' \sum_{nn} \sigma_{ij} \sigma_{kl}}$$

Renormierung

$$Z(N/2, K') \approx f(K)^{-\frac{N}{2}} Z(N, K)$$

$$K' = K_1 + K_2 = \frac{3}{8} \ln \cosh(4K)$$

$$f(K)^{-\frac{N}{2}} = (2 \cosh^{\frac{1}{2}}(2K) \cosh^{\frac{1}{8}}(4K))^{-\frac{N}{2}}$$

Laufende Kopplung
Skalierungsfaktor



Renormierung

Zustandssumme

$$Z \approx f(K)^{\frac{N}{2}} \sum_{\sigma} e^{K' \sum_{nn} \sigma_{ij} \sigma_{kl}}$$

Renormierung

$$Z(N/2, K') \approx f(K)^{-\frac{N}{2}} Z(N, K)$$

$$K' = K_1 + K_2 = \frac{3}{8} \ln \cosh(4K)$$

Laufende Kopplung

$$f(K)^{-\frac{N}{2}} = (2 \cosh^{\frac{1}{2}}(2K) \cosh^{\frac{1}{8}}(4K))^{-\frac{N}{2}}$$

Skalierungsfaktor

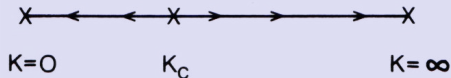
Fluß der freien Energie/Spin

$$\ln Z = N\xi \Rightarrow \xi(K') = 2\xi(K) - \ln \left[2 \cosh^{\frac{1}{2}}(2K) \cosh^{\frac{1}{8}}(4K) \right]$$



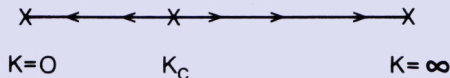
Der Phasenübergang des 2D-Ising-Modells

Der Renormierungsgruppenfluß



Der Phasenübergang des 2D-Ising-Modells

Der Renormierungsgruppenfluß



Der Phasenübergang des 2D-Ising-Modells

- Für $K_c = 0.50698$ weist der Renormierungsgruppenfluß einen Fixpunkt auf
- ξ und damit Z sind für $K = K_c$ nicht analytisch
- Der exakte Wert von K_c beträgt gemäß der Lösung nach Onsager $K_c = 0.44069$

Kritische Exponenten

Annahme

$\xi(K)$ beinhaltet den nichtanalytischen Term $\alpha|K - K_C|^{2-\alpha}$

Es gelten folgende Beziehungen:

- $K' = K_c + (K - K_c) \frac{dK'}{dK} \Big|_{K=K_c}$ (Taylorentwicklung von K')

- Über $2\xi(K) = \xi(K') + \dots$ folgt:

$$2\alpha|K - K_C|^{2-\alpha} = \alpha|K' - K_C|^{2-\alpha} = \alpha|(K - K_c) \frac{dK'}{dK} \Big|_{K=K_c}|^{2-\alpha}$$

Bestimmung von α

Über $2 = \frac{dK'}{dK} \Big|_{K=K_c}^{2-\alpha}$ folgt: $\alpha = 2 - \ln 2 / \ln \frac{dK'}{dK} \Big|_{K=K_c}$

Kritische Exponenten

Am Phasenübergang gilt:

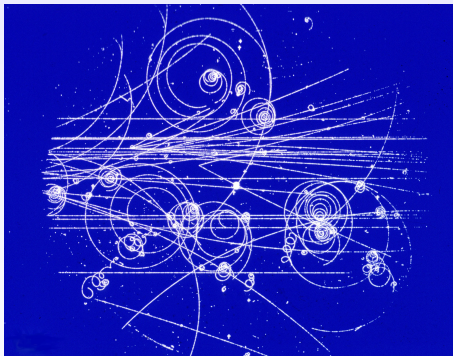
- $\xi(K) \approx \alpha |K - K_c|^{2-\alpha}$
- $C \sim |1 - T/T_c|^{-\alpha}$

Vergleich mit der exakten Lösung

- Für α ergibt sich: $\alpha = 2 - \ln 2 / \ln \frac{dK'}{dK} \Big|_{K=K_c} = 0.131$
- Gemäß der exakten Lösung nach Onsager gilt $\alpha = 0$.
C weist eine logarithmische Singularität auf.



Ein Ausflug in die Teilchenphysik



Ein Ausflug in die Teilchenphysik



Ein Ausflug in die Teilchenphysik

- 6 Renormierung in der Teilchenphysik
 - Störungstheorie
 - Das Auftreten von Divergenzen
 - Renormierte Störungstheorie am Beispiel der QED



Ein Ausflug in die Teilchenphysik

- 6 Renormierung in der Teilchenphysik
 - Störungstheorie
 - Das Auftreten von Divergenzen
 - Renormierte Störungstheorie am Beispiel der QED

- 7 Renormierungsgruppe
 - Die Renormierungsgruppe in der Teilchenphysik



Störungstheorie

Zustandssumme und Korrelationsfunktionen

$$Z = \int \mathcal{D}\phi_1 \dots \mathcal{D}\phi_m e^{i \int d^4x \mathcal{L}(\phi_1 \dots \phi_m)}$$

(Allgemeine Zustandssumme einer QFT mit der Lagrangedichte \mathcal{L})

$$\langle \Omega | T \phi_{i_1}(x_1) \dots \phi_{i_n}(x_n) | \Omega \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi_1 \dots \mathcal{D}\phi_m \phi_{i_1}(x_1) \dots \phi_{i_n}(x_n) e^{i \int d^4x \mathcal{L}}$$

(n-Punkt Korrelationsfunktion)



Störungstheorie

Zustandssumme und Korrelationsfunktionen

$$Z = \int \mathcal{D}\phi_1 \dots \mathcal{D}\phi_m e^{i \int d^4x \mathcal{L}(\phi_1 \dots \phi_m)}$$

(Allgemeine Zustandssumme einer QFT mit der Lagrangedichte \mathcal{L})

$$\langle \Omega | T \phi_{i_1}(x_1) \dots \phi_{i_n}(x_n) | \Omega \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi_1 \dots \mathcal{D}\phi_m \phi_{i_1}(x_1) \dots \phi_{i_n}(x_n) e^{i \int d^4x \mathcal{L}}$$

(n-Punkt Korrelationsfunktion)

Beispiel: QED

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi - \frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 \quad \text{mit: } D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$$



Störungstheorie

Zustandssumme und Korrelationsfunktionen

$$Z = \int \mathcal{D}\phi_1 \dots \mathcal{D}\phi_m e^{i \int d^4x \mathcal{L}(\phi_1 \dots \phi_m)}$$

(Allgemeine Zustandssumme einer QFT mit der Lagrangedichte \mathcal{L})

$$\langle \Omega | T \phi_{i_1}(x_1) \dots \phi_{i_n}(x_n) | \Omega \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi_1 \dots \mathcal{D}\phi_m \phi_{i_1}(x_1) \dots \phi_{i_n}(x_n) e^{i \int d^4x \mathcal{L}}$$

(n-Punkt Korrelationsfunktion)

Beispiel: QED

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi - \frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 \quad \text{mit: } D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$$

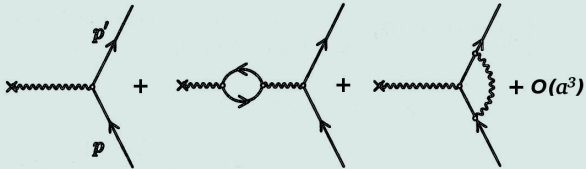
Störungsreihe

Über eine Entwicklung der Exponentialfunktion nach der Kopplung (QED: $\sqrt{\alpha}$, $\alpha = e^2/4\pi$) ergibt sich eine Störungsreihe deren Elemente sich graphisch interpretieren lassen (Feynman-Diagramme).



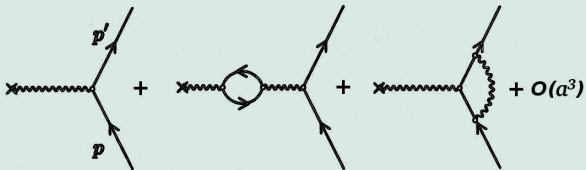
Das Auftreten von Divergenzen

Beispiel: Der QED-Vertex im Impulsraum



Das Auftreten von Divergenzen

Beispiel: Der QED-Vertex im Impulsraum



Problem

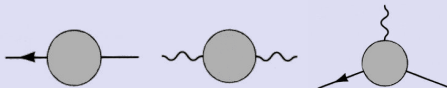
Diagramm zur Darstellung des Problems der Divergenz. Es zeigt die Gleichung:

$$\text{Vertex} = \int \frac{d^4 k}{2\pi^4} \text{Vertex} = \infty$$

Das linke Diagramm zeigt den tree-level Vertex mit Momenten q , p und p' . Das rechte Diagramm zeigt den ein-loop Vertex mit Momenten q , k , $p-k$, p und p' . Die Gleichung zeigt, dass das Integral über k divergiert.

Renormierte Störungstheorie am Beispiel der QED

Die oberflächlich divergenten Amplituden der QED



Divergenzen treten in der QED bei obigen Diagrammen, sowie bei Diagrammen welche diese enthalten auf.

Physikalische Erwartung

$$\begin{array}{c} \leftarrow \\ p \end{array} = \frac{i}{\gamma_\mu p^\mu - m + i\epsilon}, \quad \begin{array}{c} \mu \\ \leftarrow \\ q \end{array} = \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon}, \quad \begin{array}{c} \mu \\ \leftarrow \\ \bullet \end{array} = ie\gamma^\mu$$

m: physikalische Masse, e: physikalische Ladung



Renormierte Störungstheorie am Beispiel der QED

Lösungsansatz

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{QED} &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu (\partial_\mu - e_0 A_\mu) - m_0) \psi - \frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 = \\ &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu (\partial_\mu - e A_\mu) - m) \psi - \frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 + \\ &+ \bar{\psi} (i\gamma^\mu (\delta_2 \partial_\mu - e \delta_1 A_\mu) - \delta_m m) \psi - \frac{1}{4} \delta_3 (F_{\mu\nu})^2\end{aligned}$$



Renormierte Störungstheorie am Beispiel der QED

Lösungsansatz

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{QED} &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu (\partial_\mu - e_0 A_\mu) - m_0) \psi - \frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 = \\ &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu (\partial_\mu - e A_\mu) - m) \psi - \frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 + \\ &+ \bar{\psi} (i\gamma^\mu (\delta_2 \partial_\mu - e \delta_1 A_\mu) - \delta_m m) \psi - \frac{1}{4} \delta_3 (F_{\mu\nu})^2\end{aligned}$$

Parameter: e_0, m_0 (unrenormierte Ladung und Masse)



Renormierte Störungstheorie am Beispiel der QED

Lösungsansatz

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{QED} &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu (\partial_\mu - e_0 A_\mu) - m_0) \psi - \frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 = \\ &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu (\partial_\mu - e A_\mu) - m) \psi - \frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 + \\ &+ \bar{\psi} (i\gamma^\mu (\delta_2 \partial_\mu - e \delta_1 A_\mu) - \delta_m m) \psi - \frac{1}{4} \delta_3 (F_{\mu\nu})^2\end{aligned}$$

Parameter: e , m (physikalische Ladung und Masse)



Renormierte Störungstheorie am Beispiel der QED

Lösungsansatz

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{QED} &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu (\partial_\mu - e_0 A_\mu) - m_0) \psi - \frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 = \\ &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu (\partial_\mu - e A_\mu) - m) \psi - \frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 + \\ &+ \bar{\psi} (i\gamma^\mu (\delta_2 \partial_\mu - e \delta_1 A_\mu) - \delta_m m) \psi - \frac{1}{4} \delta_3 (F_{\mu\nu})^2\end{aligned}$$

Parameter: $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_m$ (Renormierungsparameter)



Renormierte Störungstheorie am Beispiel der QED

Lösungsansatz

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{QED} &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu (\partial_\mu - e_0 A_\mu) - m_0) \psi - \frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 = \\ &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu (\partial_\mu - e A_\mu) - m) \psi - \frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 + \\ &+ \bar{\psi} (i\gamma^\mu (\delta_2 \partial_\mu - e \delta_1 A_\mu) - \delta_m m) \psi - \frac{1}{4} \delta_3 (F_{\mu\nu})^2\end{aligned}$$

Neue Propagatoren, Vertices

$$\begin{aligned}\leftarrow \otimes \longrightarrow &= i(\gamma_\mu p^\mu \delta_2 - \delta_m), & \mu \text{---} \otimes \text{---} \nu &= -i(g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \delta_3, \\ & & \begin{array}{c} \mu \\ \text{---} \\ \otimes \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} &= ie\gamma^\mu \delta_1\end{aligned}$$



Renormierte Störungstheorie am Beispiel der QED

Beseitigung der Divergenzen

Bestimme $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ und δ_m so daß:

$$\begin{aligned}
 \text{[Loop Diagram]} &= \text{[External Line]} = \frac{i}{\gamma_\mu p^\mu - m + i\epsilon}, & \text{[Loop Diagram]} &= \mu \text{ [External Line]} \nu = \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon}, \\
 \text{[Loop Diagram]} &= \text{[Vertex Diagram]} = ie\gamma^\mu
 \end{aligned}$$

Renormierte Störungstheorie am Beispiel der QED

Beseitigung der Divergenzen

Bestimme $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ und δ_m so daß:

$$\begin{aligned}
 \text{Feynman diagram (circle)} &= \text{Feynman diagram (line with arrow } p) = \frac{i}{\gamma_\mu p^\mu - m + i\epsilon}, & \text{Feynman diagram (circle with wavy line)} &= \mu \text{Feynman diagram (wavy line with arrow } q)^\nu = \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon}, \\
 \text{Feynman diagram (circle with wavy line)} &= \text{Feynman diagram (vertex with wavy line)} = ie\gamma^\mu
 \end{aligned}$$

Renormierbarkeit

Eine Feldtheorie wird als renormierbar bezeichnet wenn nur eine endliche Anzahl oberflächlich divergenter Amplituden auftritt, so daß nur eine endliche Anzahl von Parametern experimentell bestimmt werden muß.



Renormierte Störungstheorie am Beispiel der QED

Beseitigung der Divergenzen

Bestimme $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ und δ_m so daß:

$$\begin{aligned}
 \text{Feynman diagram (circle)} &= \text{Feynman diagram (line with arrow } p) = \frac{i}{\gamma_\mu p^\mu - m + i\epsilon}, & \text{Feynman diagram (circle with wavy line)} &= \mu \text{Feynman diagram (wavy line with arrow } q)^\nu = \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon}, \\
 \text{Feynman diagram (circle with wavy line)} &= \text{Feynman diagram (vertex with wavy line)} = ie\gamma^\mu
 \end{aligned}$$

Frage

Warum sind die fundamentalen Theorien der Physik (QED, QCD etc.) renormierbar?



Die Renormierungsgruppe in der Teilchenphysik

Der Wilsonsche Ansatz zur Renormierung

- Die Theorie wird bis zu einer Impulsobergrenze als definiert angesehen (Impuls-Cutoff)
- Durch Ausintegrieren von Impulsfreiheitsgraden (Schalen im Impulsraum) kann die laufende Kopplung für die Parameter der Lagrangedichte bestimmt werden



Die Renormierungsgruppe in der Teilchenphysik

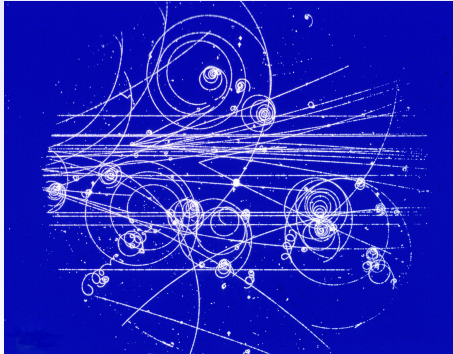
Der Wilsonsche Ansatz zur Renormierung

- Die Theorie wird bis zu einer Impulsobergrenze als definiert angesehen (Impuls-Cutoff)
- Durch Ausintegrieren von Impulsfreiheitsgraden (Schalen im Impulsraum) kann die laufende Kopplung für die Parameter der Lagrangedichte bestimmt werden

Ergebnisse

- Für die fundamentalen physikalischen Theorien zeigt sich bei schwacher Kopplung daß unrenormierbare Terme in der Lagrangedichte verschwinden.
- Sie sind in der Nähe des Fixpunktes für freie Felder im Wilsonschen Sinne exakt renormierbar.

Fragen



Fragen?

